## 15. CUBO DI UN BINOMIO

$$\boxed{(a+b)^3} = (a+b)^2(a+b) = \left(a^2+2ab+b^2\right)(a+b) = a^3 + \underline{a^2b} + \underline{2a^2b} + 2ab^2 + ab^2 + b^3 = \boxed{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$$

Il **cubo di un binomio** si esegue mediante la formula

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$$

e cioè facendo:

- il **cubo del primo** termine
- **3 volte il quadrato del primo × il secondo**
- **3 volte il primo × il quadrato del secondo**
- il **cubo del secondo**

**Esempi:**

a) $(x+2y)^3 = x^3+3\cdot x^2\cdot 2y+3\cdot x\cdot 4y^2+8y^3 = x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$

b) $\underset{a+(-5)}{(a-5)}{}^3 = a^3+3\cdot a^2\cdot(-5)+3\cdot a\cdot(-5)^2+(-5)^3 = a^3-15a^2+75a-125$

c) $\left(-x^2+1\right)^3 = -x^6+3\cdot x^4\cdot 1+3\cdot\left(-x^2\right)\cdot 1+1 = -x^6+3x^4-3x^2+1$

d) $\left(-4a^2-a\right)^3 = -64a^6+3\cdot 16a^4\cdot(-a)+3\cdot\left(-4a^2\right)\cdot a^2-a^3 = -64a^6-48a^5-12a^4-a^3$

e) $\left(2-x^n\right)^3 = 8-12x^n+6x^{2n}-x^{3n}$

f) **Alla fine**, dopo aver fatto i calcoli, la **successione dei segni** potrà essere *esclusivamente* una delle seguenti:

| $\boxed{+\ +\ +\ +}$ | $\boxed{+\ -\ +\ -}$ | $\boxed{-\ +\ -\ +}$ | $\boxed{-\ -\ -\ -}$ |
|---|---|---|---|
| *esercizio a)* | *esercizi b), e)* | *esercizio c)* | *esercizio d)* |

- **Il primo segno** dello sviluppo **coinciderà** quindi sempre **con quello del 1° termine** del binomio dato
- e **i quattro segni** dello sviluppo **saranno**
  - **tutti uguali** fra loro, **se i coefficienti dei termini del binomio iniziale erano concordi**;
  - **alterni**, **se i coefficienti dei termini del binomio iniziale erano discordi.**

g) Un'**espressione**:

$$\frac{1}{5}\left[(x+3)^3-(x-2)^3\right]-3x(x+1) = \frac{1}{5}\left[x^3+3\cdot x^2\cdot 3+3\cdot x\cdot 9+27-\left(x^3+3\cdot x^2\cdot(-2)+3\cdot x\cdot 4-8\right)\right]-3x^2-3x =$$

$$= \frac{1}{5}\left[x^3+9x^2+27x+27-\left(x^3-6x^2+12x-8\right)\right]-3x^2-3x = \frac{1}{5}\left[\cancel{x^3}+9x^2+27x+27-\cancel{x^3}+6x^2-12x+8\right]-3x^2-3x =$$

$$= \frac{1}{5}\left[15x^2+15x+35\right]-3x^2-3x = \cancel{3x^2}+\cancel{3x}+7-\cancel{3x^2}-\cancel{3x} = 7$$

### ESERCIZI

1) $(y+1)^3$ *con verifica per* $y=1$ 2) $(y+2)^3$ *con verifica per* $y=1$ 3) $(y+3)^3$ *con verifica per* $y=1$

4) $(y-4)^3$ *con verifica per* $y=1$ 5) $(y-z)^3$ *e verifica per* $y=5, z=4$ 6) $(2xy+1)^3$

7) $\left(\frac{1}{3}a-x\right)^3$ 8) $\left(-\frac{1}{2}s+\frac{2}{3}t\right)^3$ 9) $\left(-\frac{1}{4}h-2\right)^3$ 10) $\left(\frac{1}{5}a^2-\frac{1}{2}a\right)^3$ 11) $\left(\frac{3}{2}x^m+\frac{2}{3}x^p\right)^3$ 12) $\left(a+a^k\right)^3$

### RISULTATI

1) $y^3+3y^2+3y+1$ 2) $y^3+6y^2+12y+8$ 3) $y^3+9y^2+27y+27$

4) $y^3-12y^2+48y-64$ 5) $y^3-3y^2z+3yz^2-z^3$ 6) $8x^3y^3+12x^2y^2+6xy+1$

7) $\frac{1}{27}a^3-\frac{1}{3}a^2x+ax^2-x^3$ 8) $-\frac{1}{8}s^3+\frac{1}{2}s^2t-\frac{2}{3}st^2+\frac{8}{27}t^3$ 9) $-\frac{1}{64}h^3-\frac{3}{8}h^2-3h-8$

10) $\frac{1}{125}a^6-\frac{3}{50}a^5+\frac{3}{20}a^4-\frac{1}{8}a^3$ 11) $\frac{27}{8}x^{3m}+\frac{9}{2}x^{2m+p}+2x^{m+2p}+\frac{8}{27}x^{3p}$ 12) $a^3+3a^{2+k}+3a^{1+2k}+a^{3k}$