

16. QUARTA, QUINTA, ... n-ESIMA POTENZA DI UN BINOMIO

$$\begin{aligned} (a+b)^4 &= (a+b)^3(a+b) = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a+b) = \\ &= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 = \boxed{a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a+b)^5 &= (a+b)^4(a+b) = (a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4)(a+b) = \\ &= a^5 + 4a^4b + 6a^3b^2 + 4a^2b^3 + ab^4 + a^4b + 4a^3b^2 + 6a^2b^3 + 4ab^4 + b^5 = \boxed{a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5} \end{aligned}$$

$$(a+b)^6 = (a+b)^5(a+b) = \dots = \boxed{a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6}$$

ecc. ecc.

Vediamo così che le formule per le **potenze di un binomio** presentano un aspetto armonioso e regolare.

Si ha, in generale, $\boxed{(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \dots + nab^{n-1} + b^n}$, ossia:

lo sviluppo di $(a+b)^n$

- **comincia da a^n**
- **e prosegue poi secondo le potenze decrescenti di a e crescenti di b , fino a terminare con b^n ;**
- **il polinomio è omogeneo**, perché questo decrescere dell'esponente di a , abbinato al simultaneo crescere dell'esponente di b , fa sì che il grado dei vari termini si mantenga sempre uguale a n ;
- inoltre, si osserva che **il secondo e il penultimo coefficiente valgono n** .

Ciò permetterebbe di ricordare le varie formule senza fatica, se non fosse per i coefficienti intermedi: ... quelli, non è affatto facile tenerli a mente!

Ci domandiamo allora:

esiste un metodo comodo per ricostruire rapidamente pure i coefficienti intermedi?

Cominciamo con l'osservare che lo sviluppo di $(a+b)^4$ viene ricavato da quello (già noto) di $(a+b)^3$; allo stesso modo, lo sviluppo di $(a+b)^5$ viene ricavato da quello (già noto) di $(a+b)^4$, e così via.

Prendiamo ora, per esempio, il calcolo tramite il quale $(a+b)^5$ viene "generato" a partire da $(a+b)^4$.

Si scrive $(a+b)^5 = (a+b)^4(a+b)$, dopodiché si sviluppa $(a+b)^4$ e infine si svolge il prodotto: i monomi di $(a+b)^4$ vengono moltiplicati prima tutti per a poi tutti per b , e da ultimo si riducono i termini simili.

Riprendiamo in esame la moltiplicazione $(a+b)^4(a+b)$, ponendo particolare attenzione sui coefficienti, e andando a capo in modo "furbo", affinché i monomi simili risultino incolonnati. Avremo:

$$\begin{aligned} (a+b)^5 &= (a+b)^4(a+b) = (a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4)(a+b) = \\ &= \underbrace{\left(\boxed{1}a^4 + \boxed{4}a^3b + \boxed{6}a^2b^2 + \boxed{4}ab^3 + \boxed{1}b^4 \right)}_{\text{sviluppo di } (a+b)^4} (a+b) = \\ &= \begin{array}{cccccc} 1a^5 & +4a^4b & +6a^3b^2 & +4a^2b^3 & +1ab^4 & \\ & +1a^4b & +4a^3b^2 & +6a^2b^3 & +4ab^4 & +1b^5 \end{array} \\ &= \underbrace{\left[\boxed{1}a^5 + \boxed{\frac{5}{4+1}}a^4b + \boxed{\frac{10}{6+4}}a^3b^2 + \boxed{\frac{10}{4+6}}a^2b^3 + \boxed{\frac{5}{1+4}}ab^4 + \boxed{1}b^5 \right]}_{\text{sviluppo di } (a+b)^5} \end{aligned}$$

Possiamo a questo punto rilevare un fatto molto interessante:

i coefficienti dello sviluppo di una potenza di binomio sono tali che ognuno di essi

(a parte il primo e l'ultimo, che sono unitari)

è ricavabile sommando due opportuni coefficienti, relativi alla potenza precedente!

Ad esempio, il secondo coefficiente del nostro risultato (sto pensando al coefficiente 5 del termine $5a^4b$) è ottenuto sommando 4 e 1, che sono poi il secondo e il primo coefficiente, relativi alla potenza precedente. Analogamente, il terzo coefficiente del nostro risultato (mi riferisco al coefficiente 10 del termine $10a^3b^2$) è ottenuto sommando 6 e 4, che sono poi il terzo e il secondo coefficiente, relativi alla potenza precedente.

Bene! Abbiamo così trovato il metodo per ricostruire rapidamente i vari coefficienti successivi!

Ogni coefficiente (a parte il primo e l'ultimo, unitari) si può ricavare sommando due opportuni coefficienti, relativi alla potenza precedente, e per l'esattezza:

- ♪ il coefficiente di ugual posto (nella potenza precedente)
- ♪ e il coefficiente che precedeva quest'ultimo (sempre nella potenza precedente).

Ad es., i coeff. di $(a+b)^6$ potranno essere ricavati istantaneamente partendo dai coeff. di $(a+b)^5$, che sono

$$\boxed{1} \quad \boxed{5} \quad \boxed{10} \quad \boxed{10} \quad \boxed{5} \quad \boxed{1}.$$

Basterà scrivere la sequenza di numeri

$$\boxed{1} \quad 1+5=\boxed{6} \quad 5+10=\boxed{15} \quad 10+10=\boxed{20} \quad 10+5=\boxed{15} \quad 5+1=\boxed{6} \quad \boxed{1}$$

dopodiché sarà sufficiente appiccicare a ciascun coefficiente la parte letterale corretta per ottenere

$$(a+b)^6 = a^6 + \boxed{6}a^5b + \boxed{15}a^4b^2 + \boxed{20}a^3b^3 + \boxed{15}a^2b^4 + \boxed{6}ab^5 + b^6$$

Ricapitoliamo. L' n-esima potenza di un binomio è un polinomio con le seguenti caratteristiche:

- è di grado n
- è omogeneo (= tutti i suoi termini hanno lo stesso grado)
- è ordinato secondo le potenze decrescenti del primo termine e crescenti del secondo termine
- contiene n+1 termini
- il suo primo e il suo ultimo coefficiente valgono 1
- il suo secondo e il suo penultimo coefficiente valgono n
- i coefficienti intermedi possono essere ricavati tenendo presente che ogni coeff. è uguale alla somma
 - ♪ fra il coefficiente di ugual posto, dello sviluppo precedente,
 - ♪ e il coefficiente che, sempre nello sviluppo precedente, precedeva quest'ultimo.

A tale scopo, i vari coefficienti possono essere organizzati in un apposito schema, detto "Triangolo di Tartaglia" (Niccolò Fontana detto il Tartaglia, algebrista italiano, 1499-1557), nel quale ogni numero di ciascuna fila orizzontale (tranne il primo e l'ultimo, che sono uguali a 1) è calcolato come somma dei due che lo sovrastano.

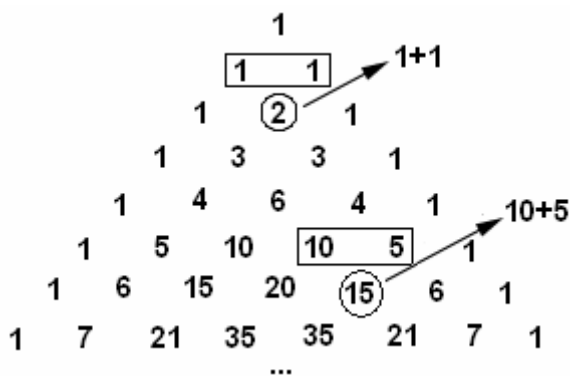
Per costruire il Triangolo di Tartaglia, possiamo immaginarlo come un albero di Natale. In alto, sul cucuzzolo, ci mettiamo un 1.

Ora scendiamo lungo le pendici dell'albero, scrivendo (seconda riga) un 1 e poi un altro 1.

Scendiamo ancora: siamo sulla terza riga; come primo elemento della riga scriviamo un 1; poi, dato che sopra di noi troviamo una coppia di 1, scriviamo un 2 ($1+1=2$). Terminiamo la riga con un 1.

Abbiamo così costruito i coefficienti (1, 2, 1) di $(a+b)^2$.

Scendiamo ancora, ed ecco che, procedendo allo stesso modo, si generano i coefficienti (1, 3, 3, 1) di $(a+b)^3$ E così per le righe successive.



Secondo te, si può dare un significato anche alla seconda riga (1, 1) del triangolo di Tartaglia? E al cucuzzolo?

Dal "Triangolo di Tartaglia" otteniamo, dunque, le formule:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

$$(a+b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$$

ecc. ecc.

Esempi di applicazione:

$$a) \quad (3x+2)^4 = 81x^4 + 4 \cdot 27x^3 \cdot 2 + 6 \cdot 9x^2 \cdot 4 + 4 \cdot 3x \cdot 8 + 16 = 81x^4 + 216x^3 + 216x^2 + 96x + 16$$

$$b) \quad (x^2-2)^5 = (x^2)^5 + 5 \cdot (x^2)^4 \cdot (-2) + 10 \cdot (x^2)^3 \cdot (-2)^2 + 10 \cdot (x^2)^2 \cdot (-2)^3 + 5 \cdot x^2 \cdot (-2)^4 + (-2)^5 = \\ = x^{10} - 10x^8 + 40x^6 - 80x^4 + 80x^2 - 32$$

$$c) \quad \left(\frac{1}{2}a-1\right)^6 = \frac{1}{64}a^6 + 6 \cdot \frac{1}{32}a^5 \cdot (-1) + 15 \cdot \frac{1}{16}a^4 \cdot (+1) + 20 \cdot \frac{1}{8}a^3 \cdot (-1) + 15 \cdot \frac{1}{4}a^2 \cdot (+1) + 6 \cdot \frac{1}{2}a \cdot (-1) + 1 = \\ = \frac{1}{64}a^6 - \frac{3}{16}a^5 + \frac{15}{16}a^4 - \frac{5}{2}a^3 + \frac{15}{4}a^2 - 3a + 1$$

$$d) \quad (-x-3)^4 = (-x)^4 + 4 \cdot (-x)^3 \cdot (-3) + 6 \cdot (-x)^2 \cdot (-3)^2 + 4 \cdot (-x) \cdot (-3)^3 + (-3)^4 = \\ = x^4 + 4 \cdot (-x^3) \cdot (-3) + 6 \cdot x^2 \cdot 9 + 4 \cdot (-x) \cdot (-27) + 81 = x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81$$

$$e) \quad (-2a-b)^5 = (-2a)^5 + 5 \cdot (-2a)^4 \cdot (-b) + 10 \cdot (-2a)^3 \cdot (-b)^2 + 10 \cdot (-2a)^2 \cdot (-b)^3 + 5 \cdot (-2a) \cdot (-b)^4 + (-b)^5 = \\ = -32a^5 + 5 \cdot 16a^4 \cdot (-b) + 10 \cdot (-8a^3) \cdot b^2 + 10 \cdot 4a^2 \cdot (-b^3) + 5 \cdot (-2a) \cdot b^4 - b^5 = \\ = -32a^5 - 80a^4b - 80a^3b^2 - 40a^2b^3 - 10ab^4 - b^5$$

$$f) \quad (a^x + a^y)^4 = a^{4x} + 4 \cdot a^{3x} \cdot a^y + 6 \cdot a^{2x} \cdot a^{2y} + 4 \cdot a^x \cdot a^{3y} + a^{4y} = \\ = a^{4x} + 4a^{3x+y} + 6a^{2x+2y} + 4a^{x+3y} + a^{4y}$$

OSSERVAZIONE

I termini dello sviluppo dell' n-esima potenza di un binomio hanno sempre **segni**:

- **TUTTI UGUALI** fra loro (se i coefficienti dei due termini di partenza sono **concordi**)
+ + + + ... oppure - - - - ...
- o altrimenti **ALTERNI** (se i coefficienti dei due termini di partenza sono **discordi**)
+ - + - ... oppure - + - + ...

Basterà perciò determinare il PRIMO di questi segni (che dipende dal segno del primo fra i due coefficienti nel binomio, e dal fatto se l'esponente sia pari o dispari) per avere la corretta sequenza dei segni finali.

ESERCIZI

- | | |
|---|--|
| 1) $(t-3)^4$ con verifica ponendo $t=1$ | 2) $(5x+2y)^4$ Verifica per $x=1, y=-2$ |
| 3) $(2a^2-a)^4$ Due verifiche, con $a=1$ e $a=-1$ | 4) $(t+10)^5$ Verifica con $t=-10$ |
| 5) $(x-3y)^5$ Verifica con $x=y=1$ | 6) $(-1-b^3)^5$ Verifica con $b=-1$ |
| 7) $(1+c)^6$ Verifica con $c=-1$ e con $c=1$ | 8) $(-1+c)^6$ Verifica con $c=1$ e con $c=2$ |
| 9) $(p-2)^6$ Verifica con $p=1$ | 10) $(-1+w)^9$ Verifica con $w=1$ |

RISULTATI

- | | |
|--|---|
| 1) $t^4 - 12t^3 + 54t^2 - 108t + 81$ | 2) $625x^4 + 1000x^3y + 600x^2y^2 + 160xy^3 + 16y^4$ |
| 3) $16a^8 - 32a^7 + 24a^6 - 8a^5 + a^4$ | 4) $t^5 + 50t^4 + 1000t^3 + 10000t^2 + 50000t + 100000$ |
| 5) $x^5 - 15x^4y + 90x^3y^2 - 270x^2y^3 + 405xy^4 - 243y^5$ | 6) $-1 - 5b^3 - 10b^6 - 10b^9 - 5b^{12} - b^{15}$ |
| 7) $1 + 6c + 15c^2 + 20c^3 + 15c^4 + 6c^5 + c^6$ | 8) $1 - 6c + 15c^2 - 20c^3 + 15c^4 - 6c^5 + c^6$ |
| 9) $p^6 - 12p^5 + 60p^4 - 160p^3 + 240p^2 - 192p + 64$ | |
| 10) $-1 + 9w - 36w^2 + 84w^3 - 126w^4 + 126w^5 - 84w^6 + 36w^7 - 9w^8 + w^9$ | |