

18. ESPRESSIONI CON PRODOTTI NOTEVOLI

Esempi svolti:

$$\begin{aligned} \text{A)} \quad & \boxed{9(2a+b)^2 - (6a-b)^2 - 8b(6a+b)} = 9(4a^2 + 4ab + b^2) - (36a^2 - 12ab + b^2) - 48ab - 8b^2 = \\ & = \cancel{36a^2} + \cancel{36ab} + \cancel{9b^2} - \cancel{36a^2} + \cancel{12ab} - \cancel{b^2} - \cancel{48ab} - \cancel{8b^2} = \boxed{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{B)} \quad & \boxed{\left\{ \frac{1}{8} [(2x+3y)(2x-3y) - (2x-y)(2x+y)] + 1 \right\}^2 + 2y^2} = \\ & = \left\{ \frac{1}{8} [4x^2 - 9y^2 - (4x^2 - y^2)] + 1 \right\}^2 + 2y^2 = \left\{ \frac{1}{8} [\cancel{4x^2} - 9y^2 - \cancel{4x^2} + y^2] + 1 \right\}^2 + 2y^2 = \\ & = \left\{ \frac{1}{8} [-8y^2] + 1 \right\}^2 + 2y^2 = (-y^2 + 1)^2 + 2y^2 = y^4 - \cancel{2y^2} + 1 + \cancel{2y^2} = \boxed{y^4 + 1} \end{aligned}$$

ESERCIZI (la freccia, se c'è, è un link verso la correzione)

- 1) $(x-3y)^2 - 2x(13x-33y) + (5x-6y)^2$
- 2) $7(a-1)^2 + 2(a+2)^2 - (3a-1)^2$
- 3) $4ab + (a-b)^2 - (a+b)^2$
- 4) $3(k^2+5) - (k+3)^2 - (k-1)^2 - (k-2)^2$
- 5) $\left(x + \frac{5}{6}y\right)^2 - \frac{1}{3}y\left(2x + \frac{13}{6}y\right) + \left(3x - \frac{1}{6}y\right)^2$
- 6) $\left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{2}a^3\right)^2 - \frac{1}{4}a^3\left(a^3 - \frac{4}{3}a\right) + \frac{8}{9}a^2$
- 7) $\frac{1}{14}\left[8(x-1)(x+2) - 2(x+1)^2 - 6(x-2)^2\right] + 3$
- 8) $\frac{1}{2}\left[(a^5+1)^2 + (a^5+3)^2\right] - (a^5+7)(a^5-3)$
- 9) $\left[(a-10b)^2 - 3(2a-5b)^2 - 5(5b^2-2a^2)\right]^2 + 10 \cdot (2a)^3 \cdot b \Rightarrow$
- 10) $\frac{1}{2}\left[(-2+x)^2 + (-2-x)^2\right](x^2-3) - (x^2+2)(x^2-6) \Rightarrow$
- 11) $(-y^2-1)^2\left[2(-4+y)^2 - (y-8)^2 + 31\right]^2 \Rightarrow$
- 12) $\left(3a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a+1\right)\left(1 + \frac{1}{2}a\right) - (a-1)^2 - \frac{1}{4}(a^2+1) \Rightarrow$
- 13) $(3y-1)[y(y+1) - (y+3)(y+3)] - 5(1-y)(3y+1) + 4(8y-1)$
- 14) $(a^x - a)^2$
- 15) $(x^{k+1} + x^{k-1})^2$
- 16) $(3y^{k+1} + 5y^{3k-2})^2$
- 17) $(x^p y^{p+1} - x^3 p y)^2$
- 18) $(a^{3n} - a^4 b^n)^2$
- 19) $(a+1)(a-1) + (a+2)(a-2) + (a+3)(a-3) + (a+4)(a-4) + (a+5)(a-5)$
- 20) $4(x+2y)(x-2y) + (x+4y)^2 - 5x^2$
- 21) $(5a-4b)(5a+4b) - (3a+5b)(3a-5b) - (4a-3b)^2 \Rightarrow$
- 22) $4(3a-5)(5+3a) - 4(-3a+1)^2 - (a+4)(a-26) + a^2$
- 23) $(2x-1)(1+2x) + (1+2x)(2x+1)$
- 24) $\left(\frac{5}{3}xy + 3z\right)\left(\frac{5}{3}xy - 3z\right) - \frac{1}{9}(5xy - 6z)^2 + 13z^2 - \frac{17}{3}xyz$
- 25) $2a^2 + (a-1)^2(a+1)^2$
- 26) $\left[\left(\frac{1}{3}w+1\right)^2 - \left(\frac{1}{3}w-1\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}w+1\right)\left(-\frac{1}{3}w-1\right) - \frac{4}{3}w\right]\left(\frac{1}{9}w^2+1\right) + 1 \Rightarrow$
- 27) $\left[2(5n+1)\left(\frac{1}{5}n - \frac{1}{6}\right) - 2\left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{4}{15}n\right]^2 - \frac{1}{9}\left(\frac{1}{4} - 3n\right) \Rightarrow$
- 28) $a^2 + (a+3)(-a-3) + 3(2a+3) \Rightarrow$
- 29) $(2a+3)^2 - (-2a-3)^2$
- 30) $(x-1)(x+1)(x^2+1) - (x-2)(x+2)(x^2+4)$
- 31) $1 + [8a^2 - (2a-1)(2a+1)](2a \cdot 2a - 1) - (-2a)^4$
- 32) $\left\{[(b+3)(b-3)(b^2+9) + 80][(b+4)(b-4)(b^2+16) + 257]\right\}^2 + 2b^8$
- 33) $(3a^{3n} + 2a^{n+1})(3a^{3n} - 2a^{n+1})$
- 34) $(1-a^k)(1+a^k)(1+a^{2k})(1+a^{4k})(1+a^{8k})$

- 35) $(a-b+1)^2 - (a+b-1)^2 - 4a(1-b)$ 36) $(3x-2y-1)^2 - (3x+2y)^2 + 2(12xy+3x-2y)$
 37) $(5a-b-1)^2 - 2(1-5a)(1+b) - (b-1)(b+1) - (-5a)^2$
 38) $\frac{1}{2}[(a-2b+3c)^2 + (a+2b-3c)^2 + 24bc]$ 39) $(x-1)^2(x-2)^2 - (x^2-3x+2)^2 \Rightarrow$
 40) $(x^3-x^2+x-1)^2 + 2x(x^2+1)^2 - 3x^2(x^2+1)$ 41) $(a+b-c-d)^2 - (c+d-b)^2 - a[a+2(b-c-d)]$
 42) $[(b^k-1)(b^{2k}-1) + b^{2k}]^2 + b^k[2(b^{3k}+1) - b^k(b^k+1)]$
 43) $(x-2)^3 - (x+1)^3 + 9(x^2-x+1)$ 44) $\{(2x-1)^3 - [6x(1-2x)-1]\} : 8$
 45) $(2-t)^3 - (1-t)^3 - 3t(t-3)$ 46) $5x^2 + \frac{1}{15}[(5x-2)^3 - (5x-1)^3 + 7]$
 47) $[(b+1)^3 - (-b+1)^3] : 2-3b$ 48) $(a+y)^3 + (a-y)^3 + (-a+y)^3 + (-a-y)^3$
 49) $[(x^2+4x-1)^2 - 8x(x-1)(x+1) - 14x^2]^3 - x^4(x^4+1)(x^4+2)$
 50) $(a^2-1)^3 - (a+1)^3(a-1)^3$ 51) $[(y-2)^4 - (y+2)^4 + 64y] : (-16y^2)$
 52) $(x^2+1)^4 - x^2(x^2-1)^3 - x^2(7x^4+3x^2+5)$ 53) $-2[(-2ab)^2+1] + [(2ab+1)^4 - (4a^2b^2-ab+1)^2] : (5ab)$
 54) $(a+1)^4 - (a-1)^4 - 8a(a^2+1)$ 55) $1+(a-1)^5 + 5a[a(a^2+2) - (2a^2+1)]$
 56) $[(x+2y)^5 + (x-2y)^5] : (2x) - 40y^2(x^2+2y^2)$
 57) $9(2x-1)^2 - (6x-7)^2 - 8(6x-5)$ 58) $-(10+x)^2 + (8-x)^2 - 36(-1-x)$
 59) $\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b\right)^2 - \frac{1}{4}\left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{1}{2}ab$ 60) $2c + (-11c+3)^2 - [9(-4c+1)^2 + 8c(1-3c)]$
 61) $37 - (4s-1)^2 + 4(2s+3)(2s-3)$ 62) $(3-n)(3+n)(9+n^2) - (2+n)(2-n)(4+n^2)$
 63) $\frac{1}{4}[(3x^2+2)^2 - (3x^2-4)(3x^2+4)] - 3x^2$ 64) $2w^3 - 9w^2\left(\frac{1}{9}w-1\right)\left(\frac{1}{9}w+1\right) + \left(\frac{1}{3}w^2-3w\right)^2$
 65) $(a^2-a-1)^2 - (a+2)^2(a-1)^2 + (2a-1)(2a^2-3)$ 66) $(x^4-x^2-1)^2 + x^2[2(x^2+1) - x^2(x^2-1)^2] - 1$
 67) $45 + (x^2+3)(x^2-3) - [(-x^2+x-5)^2 - 11(x-1)(x+1)]$
 68) $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x-y\right)^2 - \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y + 2\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}x+2\right)$ 69) $(a-b+3)^2 + (3a-b+1)^2 - 2[5(a^2+1) + b^2 - 4ab] + 8b$
 70) $\left[-\left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{2}x\right)^2 + 4x^2\left(\frac{1}{3}x+y - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{4}{3}x^2y\left(2x - \frac{15}{2}\right)\right] : (-2x)^2$
 71) $2[a+(b-1)\cdot c] + (a+b-c-1)^2 - (c-a)^2 - (1-b)^2$ 72) $(a+1)^3 - (a+2)^3 + (a-1)^3 - (a-2)^3$
 73) $(t^4-t^3+2t^2-3t)^2 - t^2(t^2-2t+3)^2 + 2t^5(t^2-2t+3)$ 74) $[(x+y)^3 - (-x+y)^3] : (2x)$
 75) $(7c-2d)^3 - (5c-2d)^3 + 24cd(6c-d)$ 76) $(8a^6-1)^2 + 4a^4[3+4a^2(3a^2+1)] - (4a^4+1)^3$
 77) $\frac{1}{3}[(a+a^2b)^3 - a^3(1+a^3b^3)]$ 78) $2t + \frac{4}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}t+1\right)\left(\frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}t+1\right) - \left[\left(\frac{1}{2}t-1\right)^3 + 2\right]\right\}$
 79) $\frac{\frac{(2e^2-f)^3+f^3}{2e^2} - (2e^2-f)^2}{2} + e^2f$ 80) $\frac{ab(23a+61b) - [-(-3a+b)^3 + b(-2a+3b)^2] + (3a+2b)^3}{100ab}$
 81) $\frac{(r^4+r^2)^3 - (r^6-r^3)^2 - r^8(r^2+1)}{2}$ 82) $\frac{1}{15}\{124(1+b\cdot b^2) + [2b-(5+b)]^3 + (-5b-1)^3 + 2\}$

- 83) $(2a^x - 3a^y)^2$ 84) $a^{x+1} + (a^x - a)^2 - a^2$ 85) $(-a^x + a)^3$ 86) $(a^x)^x - (a^x - 1)^2 (a^x + 1)^2 - (a^{x^2} + 2a^{2x})$
- 87) $(3a - 2)^2 - 2(a - 2)(2a - 5) - 5(a - 2)(a + 2) - 2(3a + 2)$ 88) $(x^2 + x - 1)^2 - (x^2 + x)^2 + 2x(x + 1)$
- 89) $(3a - 2)^3 + 18a(3a - 2) + 8$ 90) $15 + (3a - 1)^4 - (3a - 2)^2 (3a + 2)^2 + 6a(18a^2 - 21a + 2)$
- 91) Dimostra che la differenza dei quadrati di 2 interi consecutivi è uguale alla somma di quegli stessi numeri
- 92) Qual è il secondo termine dello sviluppo di $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^{1000}$?
- 93) Se $A = k + 10$ e $B = k - 2$, allora:
 I) $A^2 - B^2 = ?$ II) $(A+B)(A-B) = ?$ III) $(A+B)^2 = ?$ IV) $A^2 + 2AB + B^2 = ?$
- 94) Spiega perché i numeri 1331 1030301 1003003001 1000300030001 ... sono tutti cubi perfetti, e determina gli interi dei quali essi sono cubi (Indicazione: ad esempio, $1331 = 10^3 + 3 \cdot 10^2 + \dots = \dots$)
- 95) Se il lato di un quadrato misura a cm e viene accorciato di m cm, di quanti cm^2 diminuisce l'area?
 a) $m^2 - 2am$ b) m^2 c) $2am - m^2$ d) $a^2 + m^2 - 2am$
- 96) Il lato di un cubo misura a cm. Se misurasse m centimetri in più, di quanto aumenterebbe la superficie totale del cubo? E di quanto aumenterebbe il suo volume?
- 97) Determina il lato di un quadrato sapendo che aumentandolo di 1 cm, oppure diminuendolo di 1 cm, le due rispettive aree differirebbero di 204 cm^2 (si risponde risolvendo una semplicissima equazione)
- 98) Qual è il 3° termine da sinistra nello sviluppo di $(a + a^{-1})^{10}$? Voglio dire: $(a + a^{-1})^{10} = a^{10} + \dots + ? + \dots$
- 99) Scrivi il prodotto notevole che, se viene svolto, dà come risultato $81x^4 - 49$
- 100) Determina il quadrato di binomio il cui sviluppo è
 a) $81x^2 - 36x + 4$ b) $x^4 + 121x^2 - 22x^3$ c) $4 + 4x^3 + x^6$
- 101) $4a^2 + 12ab + 9b^2 + 16c^2 - 16ac - 24bc$ è un polinomio che si ottiene eseguendo un quadrato di trinomio. Sapresti risalire al prodotto notevole di partenza?
- 102) $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1$ è un polinomio che si ottiene eseguendo un quadrato di trinomio poi riducendo due termini simili. Sapresti risalire al prodotto notevole di partenza?
- 103) Quale dei seguenti polinomi NON è lo sviluppo di un quadrato di binomio?
 a) $x^2 + 8x + 16$ b) $x^2 - 14x + 49$ c) $x^2 + 12x + 144$ d) $x^2 + 25 - 10x$ e) $1 + 6x^4 + 9x^8$
- 104) $x^8 + 4x^4 + \dots$ Completa col termine mancante, in modo che il trinomio ottenuto sia uguale al quadrato di un binomio. Ci sono DUE POSSIBILITÀ: sapresti scriverle entrambe?
- 105) Sapendo che $876 \cdot 874 = 765624$, stabilisci senza far calcoli qual è il risultato dell'operazione 875^2 .
- 106) Determina il risultato dell'operazione $857239^2 - 857243 \cdot 857235$ evitando calcoli impegnativi.
- 107) Se al quadrato di un qualsiasi numero intero si aggiunge il sestuplo dell'intero successivo, poi si addiziona ancora 3 al risultato così ottenuto, in tal modo si ottiene certamente un quadrato perfetto. Giustifica, con una catena di uguaglianze basata sul calcolo letterale, questa affermazione.
- 108) Se si prende un qualsiasi numero intero, e gli si somma il suo quadrato, poi anche il consecutivo del numero di partenza, si ottiene in tal modo sempre un quadrato perfetto. Dimostra questa affermazione.
- 109) Se si prende un qualsiasi numero intero, e dal suo quadrato si sottrae il quadrato dell'intero precedente, diminuito di 1, poi si divide per 2 ciò che si è ottenuto, si ritorna sempre all'intero di partenza! Dimostra la verità di questa affermazione.

Ad esempio:

$$7 \rightarrow \frac{49 - (36 - 1)}{2} = 7$$

IL PRINCIPIO DI IDENTITÀ DEI POLINOMI

Due polinomi nella stessa variabile si dicono "identici"

se, per qualunque valore attribuito alla variabile, i due polinomi assumono sempre ugual valore.

Il cosiddetto "**PRINCIPIO DI IDENTITÀ DEI POLINOMI**" afferma che **due polinomi sono identici se e soltanto se hanno lo stesso grado, e in essi sono uguali i coefficienti dei termini di ugual grado.**

110) Determina i valori dei due numeri a, b in modo che i due polinomi nella variabile x

$$2x^2 + (a+b)x + a \quad \text{e} \quad 2x^2 + 15x + 2b$$

siano identici, e determina il valore che tali polinomi identici assumono quando $x = 4$

RISULTATI, RISPOSTE

- 1) $45y^2$ 2) 14 3) 0 4) 1 5) $10x^2$ 6) a^2 7) $2x$ 8) 26 9) $a^4 + 1600a^2b^2$ 10) $5x^2$ 11) $y^8 - 2y^4 + 1$
 12) $8a^2$ 13) 0 14) $a^{2x} - 2a^{x+1} + a^2$ 15) $x^{2k+2} + 2x^{2k} + x^{2k-2}$ 16) $9y^{2k+2} + 30y^{4k-1} + 25y^{6k-4}$
 17) $x^2p y^2p+2 - 2x^4p y^p+2 + x^6p y^2$ 18) $a^{6n} - 2a^{3n+4}b^n + a^8b^{2n}$ 19) $5a^2 - 55$ 20) $8xy$ 21) $24ab$
 22) $46a$ 23) $8x^2 + 4x$ 24) xyz 25) $a^4 + 1$ 26) $(1/81)w^4$ 27) n^2 28) 0 29) 0 30) 15
 31) 0 32) $b^{16} + 1$ 33) $9a^{6n} - 4a^{2n+2}$ 34) $1 - a^{16k}$ 35) 0 36) 1 37) 0 38) $a^2 + 4b^2 + 9c^2$ 39) 0
 40) $x^6 + 1$ 41) 0 42) $b^{6k} + b^{3k} + 1$ 43) 0 44) x^3 45) 7 46) $3x$ 47) b^3 48) 0 49) $x^4 + 1$ 50) 0
 51) y 52) 1 53) $3ab$ 54) 0 55) a^5 56) x^4 57) 0 58) 0 59) ab 60) c^2 61) $8s$ 62) 65 63) 5
 64) $18w^2$ 65) 0 66) $4x^2$ 67) $2x^3 + 10x$ 68) $2y$ 69) $12a$ 70) $y^2 + y$ 71) $2ab$ 72) $-18a$ 73) t^8
 74) $x^2 + 3y^2$ 75) $218c^3$ 76) 0 77) $a^4b + a^5b^2$ 78) t^2 79) f^2 80) $a + b$ 81) $r^{10} + r^9 + r^8$ 82) $4b - 6b^2$
 83) $4a^{2x} - 12a^{x+y} + 9a^{2y}$ 84) $a^{2x} - a^{x+1}$ 85) $-a^{3x} + 3a^{2x+1} - 3a^{x+2} + a^3$ 86) $-a^{4x} - 1 = -(a^{4x} + 1)$
 87) 0 88) 1 89) $27a^3$ 90) 0 91) $(x+1)^2 - x^2 = \cancel{x^2} + 2x + 1 - \cancel{x^2} = x + (x+1)$ 92) $1000x^{1996}$
 93) I) $A^2 - B^2 = (k+10)^2 - (k-2)^2 = k^2 + 20k + 100 - k^2 + 4k - 4 = 24k + 96$
 II) $(A+B)(A-B) = (k+10+k-2)(k+10-k+2) = (2k+8) \cdot 12 = 24k + 96$
 III) $(A+B)^2 = (2k+8)^2 = 4k^2 + 32k + 64$ IV) $A^2 + 2AB + B^2 = \dots = 4k^2 + 32k + 64$
 94) $1331 = 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1 = (10+1)^3 = 11^3$; $1030301 = 10^6 + 3 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^2 + 1 = (10^2 + 1)^3 = 101^3$
 $1003003001 = 1001^3$; $1000300030001 = 10001^3$
 95) c), perché $a^2 - (a-m)^2 = a^2 - (a^2 - 2am + m^2) = \dots$
 96) $6(a+m)^2 - 6a^2 = 12am + 6m^2$; $(a+m)^3 - a^3 = 3a^2m + 3am^2 + m^3$ 97) 51 cm
 98) $45a^6$ 99) $(9x^2 + 7)(9x^2 - 7)$ 100a) $(9x-2)^2$ oppure $(-9x+2)^2 = (2-9x)^2$
 100b) $(x^2 - 11x)^2$ oppure $(-x^2 + 11x)^2 = (11x - x^2)^2$ 100c) $(2+x^3)^2 = (x^3+2)^2$
 101) $(2a+3b-4c)^2$ opp. $(-2a-3b+4c)^2 = (4c-2a-3b)^2$ 102) $(x^2 - x - 1)^2$ opp. $(-x^2 + x + 1)^2 = (1+x-x^2)^2$
 103) c): $(x+12)^2 = x^2 + 24x + 144$ 104) $+4$; $+4x^6$ 105) 765625. Infatti $876 \cdot 874 = (875+1)(875-1) = 875^2 - 1$
 106) $857239^2 - 857243 \cdot 857235 = 857239^2 - (857239+4)(857239-4) = 857239^2 - 857239^2 + 16 = 16$
 107) $n^2 + 6(n+1) + 3 = n^2 + 6n + 6 + 3 = n^2 + 6n + 9 = (n+3)^2$, quadrato di un intero ossia "quadrato perfetto"
 108) Qualunque sia l'intero n , è sempre $n + n^2 + (n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$
 109) $\frac{n^2 - [(n-1)^2 - 1]}{2} = \frac{n^2 - [n^2 - 2n + 1 - 1]}{2} = \frac{\cancel{n^2} - \cancel{n^2} + 2n}{2} = n$ 110) $a = 10, b = 5; 102$

VERIFICHE DI IDENTITÀ

Cos'è un' "identità"? E' un'uguaglianza letterale, vera per tutti i valori "ammissibili" delle lettere coinvolte (gli eventuali valori "non ammissibili" sono quelli che darebbero luogo a un'operazione non eseguibile:

ad esempio, l'identità $\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} = \frac{1}{a(a+1)}$ vale per $a \neq 0, a \neq -1$, ossia vale tutti i valori di a TRANNE i valori 0 e -1 , non ammissibili perché renderebbero un denominatore uguale a 0).

Esempio svolto A) Verifica che vale la seguente identità: $(2x+1)^2 + x^2 = (5x+1)(x+1) - 2x$

Eseguo i calcoli ai due membri, per constatare che si ottenga il medesimo risultato:

$$\underline{4x^2} + \underline{4x} + \underline{1} + \underline{x^2} = \underline{5x^2} + \underline{5x} + \underline{x} + \underline{1} - \underline{2x}; \quad 5x^2 + 4x + 1 = 5x^2 + 4x + 1, \quad OK!!!$$

Esempio svolto B)

Verifica che vale la seguente identità:

$$(a+b)(a+c) = (a-b)(a-c) + 2a(b+c)$$

$$\cancel{a^2} + ac + ab + \cancel{bc} = \cancel{a^2} - \cancel{ac} - \cancel{ab} + \cancel{bc} + \underline{2ab} + \underline{2ac}$$

$$ac + ab = ac + ab \quad OK$$

(NOTA)



NOTA - Giannino ha svolto l'esercizio B) "a modo suo": nel secondo passaggio, avendo individuato a primo e a secondo membro coppie di termini uguali, le ha mandate via, come si fa nelle equazioni.

Il procedimento seguito da Giannino appare certamente comodo, ma ... sarà corretto?

Sì, è correttissimo!!! Infatti, riflettiamo: se è vera l'uguaglianza "semplificata"

$$\square + \triangle = \square + \triangle,$$

allora vuol dire che era vera anche l'uguaglianza di partenza

$$\square + \triangle = \square + \triangle \quad !!!$$