ESERCIZI: IDENTITÀ (vedi riquadro a pag. 135) CON PRODOTTI NOTEVOLI, DA VERIFICARE

1) A) $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$ B) $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

2) $(a+b+c)^2+(a^2+b^2+c^2)=(a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2=2(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)$
(qui le identità sono 3, ma per la proprietà transitiva dell'uguaglianza basta verificarne 2 a scelta …)

3) $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac)^2+(ad)^2+(bc)^2+(bd)^2=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$

3') Le precedenti identità 3), dette "di Lagrange" o "di Fibonacci",
possono essere utilizzate per esprimere un numero intero come somma

- di 4 quadrati perfetti
- oppure di 2 quadrati perfetti (in due modi).

A) Ad es., sapresti fare questo per l'intero $4453=61\cdot 73$? (Trova 2 interi a, b tali che $a^2+b^2=61$, poi …)
B) Osservato che $2^2+12^2=148$, trova 4 numeri per cui la somma dei quadrati sia uguale a $148^2=21904$.

4) Controlla la validità dell'identità

$$(10d_1+u_1)(10d_2+u_2)=100d_1d_2+10(d_1u_2+d_2u_1)+u_1u_2$$

Spiega in che modo essa potrebbe aiutare a svolgere a mente il prodotto di due interi di due cifre ciascuno:
$x=10d_1+u_1,\ \ y=10d_2+u_2$ (esempio: $45\cdot 67$, dove $d_1=4, u_1=5, d_2=6, u_2=7$)
Stupisci ora i compagni con la tua capacità di eseguire a mente il prodotto di due numeri con due cifre!
Particolarizza anche l'identità al caso in cui i numeri da moltiplicare sono uguali,
osservando la relazione di quest'ultimo procedimento con la formula per il quadrato di un binomio.
E calcola con questa modalità 84^2.

5) $(a+b+c)^2-(a-b+c)^2=4b(a+c)$ 6) $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a)$

7) $(a+b)^3-(a-b)^3=2b(3a^2+b^2)$ 8) $(a+b)^4-(a-b)^4=8ab(a^2+b^2)$

9) Formule di Waring:

A) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
B) $a^4+b^4=(a+b)^4-4ab(a+b)^2+2a^2b^2$
C) $a^5+b^5=(a+b)^5-5ab(a+b)^3+5a^2b^2(a+b)$

A), B), C) fanno parte di una famiglia di identità,
chiamate "formule di Waring" in onore del matematico inglese Edward Waring (1736-1798),
che permettono di esprimere una somma di due potenze di ugual grado
per mezzo della somma e del prodotto delle basi.

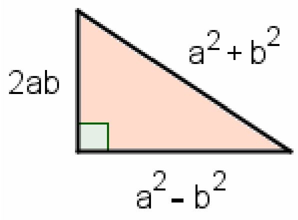
10) $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a^2b+a^2c+ab^2+b^2c+ac^2+bc^2)+6abc$

11) $a^5-a=(a-2)\cdot(a-1)\cdot a\cdot(a+1)\cdot(a+2)+5\cdot(a-1)\cdot a\cdot(a+1)$. Quanto vale $8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12+5\cdot 9\cdot 10\cdot 11$?

11') (dal bellissimo sito francese dedicato ai numeri di Gérard Villemin: http://villemin.gerard.free.fr)
Serviti dell'identità 11) per dimostrare che

- se a è un intero dispari, il numero a^5-a è sempre divisibile per 120
- mentre se a è un intero pari, il numero a^5-a è sempre divisibile per 30.

12) $(a^2-b^2)^2+(2ab)^2=(a^2+b^2)^2$
che viene utilizzata per costruire *terne pitagoriche*
(a, b interi non nulli diversi fra loro qualunque).



Una "**TERNA PITAGORICA**" è una **terna di interi**
***a, b, c* , tutti non nulli**, **tali che** $\boldsymbol{a^2+b^2=c^2}$.
Ad es., la (3, 4, 5) lo è in quanto $3^2+4^2=5^2$.
Anche (16, 30, 34) è una terna pitagorica: controlla!
… Come mai, piuttosto che l'uguaglianza $a^2+b^2=c^2$, è più semplice verificare la $a^2=c^2-b^2$?

12') Osservato che $5^2+11^2=146$, serviti dell'identità $(a^2-b^2)^2+(2ab)^2=(a^2+b^2)^2$
per determinare una terna pitagorica che abbia 146 come terzo elemento.

13) A) $a^2+\left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2$ B) $a^2+\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2-1\right)^2=\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2+1\right)^2$

A) viene impiegata per costruire terne pitagoriche, prendendo a dispari,
B) serve allo stesso scopo con a pari

13') Applica le formule precedenti per determinare due terne pitagoriche che abbiano come primo elemento rispettivamente 31 e 32

DA UN'IDENTITÀ, RICAVARNE ALTRE PER SOSTITUZIONE

- Partiamo dalla $\boxed{a^2+b^2=\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{2}}$ e facciamo le sostituzioni $\boxed{\begin{array}{l} a\to a \text{ (cioè, } a \text{ resta inalterato)} \\ b\to a+2 \end{array}}$

Otteniamo così $\boxed{a^2+(a+2)^2=\frac{(a+a+2)^2+(a-(a+2))^2}{2}}$ ossia

$a^2+(a+2)^2=\frac{(2a+2)^2+(-2)^2}{2}$; $a^2+(a+2)^2=\frac{[2(a+1)]^2+4}{2}$;

$a^2+(a+2)^2=\frac{4(a+1)^2+4}{2}$; $a^2+(a+2)^2=\frac{{}^2\cancel{4}(a+1)^2}{\cancel{2}}+\frac{{}^2\cancel{4}}{\cancel{2}}$; $\boxed{a^2+(a+2)^2=2(a+1)^2+2}$

Supponiamo che a sia un intero: l'ultima identità ci dice allora che la somma dei quadrati di due interi che differiscono di 2 unità si può ottenere prendendo l'intero fra essi compreso, elevandolo al quadrato, raddoppiando il numero ottenuto e aggiungendo 2 unità.
Prova ad eseguire in questo modo il calcolo 99^2+101^2!

- (Paolo Pellegrini)

$ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ da cui $a^x\cdot a^y=\left(\frac{a^x+a^y}{2}\right)^2-\left(\frac{a^x-a^y}{2}\right)^2$

che con $x=3$ e $y=2$ diventa $a^5=\left(\frac{a^3+a^2}{2}\right)^2-\left(\frac{a^3-a^2}{2}\right)^2$ o anche $a^5=\left(\frac{a^2(a+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{a^2(a-1)}{2}\right)^2$

14) Riparti dalle osservazioni di P. Pellegrini, e costruisci quella identità che permette di esprimere un cubo come differenza di due quadrati. Servitene poi per esprimere come diff. di quadrati il numero $343=7^3$.

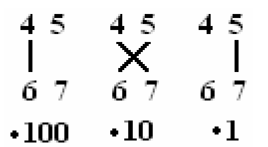
15) Se sostituiamo $-b$ al posto di b, cosa diventano le identità seguenti? A) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
B) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ C) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ D) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

16) Verifica che risulta, qualunque siano a e b, $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ e scrivi l'identità che si può ricavare da questa con le sostituzioni $a\to a+1$; $b\to a$. Ricontrolla anche la nuova identità ottenuta.

RISPOSTE

3') A: $4453=61\cdot 73=(5^2+6^2)(3^2+8^2)=15^2+40^2+18^2+48^2=63^2+22^2=33^2+58^2$ B: 4, 24, 24, 144

4) $45\cdot 67=100\cdot 4\cdot 6+10\cdot(4\cdot 7+6\cdot 5)+5\cdot 7=2400+580+35=3015$
$84^2=100\cdot 8\cdot 8+10\cdot(8\cdot 4+8\cdot 4)+4\cdot 4=\ldots$ $\rightarrow$



Moltiplicare due numeri di due cifre

11') $a^5-a=(a-2)\cdot(a-1)\cdot a\cdot(a+1)\cdot(a+2)+5\cdot(a-1)\cdot a\cdot(a+1)$
Il prodotto $(a-2)\cdot(a-1)\cdot a\cdot(a+1)\cdot(a+2)$ di 5 interi consecutivi è certamente divisibile per 120, perché fra 5 interi consecutivi ce n'è uno (e uno solo) divisibile per 5, uno almeno per 3, due almeno pari consecutivi quindi divisibili uno per 2 e l'altro per 4; ma allora tale prodotto sarà certo divisibile per $5\cdot 3\cdot 2\cdot 4=120$.
Supponiamo a dispari: il prodotto $5\cdot(a-1)\cdot a\cdot(a+1)$ ha un fattore 5, uno certamente divisibile per 3, fra i due fattori $(a-1)$ e $(a+1)$, entrambi pari, uno è divisibile per 2 e l'altro per 4: allora tale prodotto sarà anch'esso divisibile per $5\cdot 3\cdot 2\cdot 4=120$. Ora, la somma di due multipli di 120 è divisibile per 120 …

12) $a^2=c^2-b^2=(c+b)(c-b)$ e l'ultimo prodotto è spesso facile da trattare … ad es., nel caso (16, 30, 34), è $34^2-30^2=(34+30)(34-30)=64\cdot 4=8^2\cdot 2^2=16^2$

12') 96, 110, 146

13') (31, 480, 481); (32, 255, 257)

14) $a^3=\left((a^2+a)/2\right)^2-\left((a^2-a)/2\right)^2$; $7^3=28^2-21^2$

15) A) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ B) Resta invariata C) Ovviamente … D) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

16) $(a+1)^3-a^3=(a+1-a)\left((a+1)^2+(a+1)\cdot a+a^2\right)=(a+1)^2+a(a+1)+a^2$