19. LA CONGETTURA DI GOLDBACH; LA FORMULA DI GAUSS; QUADRATI MAGICI

LA CONGETTURA DI GOLDBACH

Per "**congettura**" si intende, in Matematica, un'**affermazione della cui verità si è fortemente convinti, e che tuttavia non si è riusciti a dimostrare**.
La "**CONGETTURA DI GOLDBACH**" fa la sua comparsa in uno scambio di lettere, datato 1742, fra il prussiano Christian Goldbach e il grande matematico svizzero Eulero (1707-1783). Essa afferma che

QUALSIASI NUMERO PARI MAGGIORE DI 2 PUÒ SEMPRE ESSERE SCRITTO COME SOMMA DI DUE NUMERI PRIMI (eventualmente fra loro uguali).

Qualche esempio: $4=2+2$; $6=3+3$; $8=3+5$; $10=3+7=5+5$; $12=5+7$; $14=3+11=7+7$; …

♥ D'altra parte, **un'affermazione che chiama in causa infiniti casi non si può ritenere dimostrata neppure se si è constatato che è vera per un numero enorme di questi casi; essa, invece, richiede**
- ♪ **o un procedimento dimostrativo di carattere generale che ne provi la verità (trasformando, quindi, la "congettura" in un "teorema")**
- ♫ **oppure la scoperta di un controesempio che la faccia crollare, facendo vedere che è falsa.**

❑ Lo stesso Eulero riteneva plausibile che se una somma di n quarte potenze di interi dava ancora la quarta potenza di un intero, allora n dovesse essere per forza ≥ 4.
Ma nel 1988 l'americano Elkies scoprì che invece
$$2682440^4+15365639^4+18796760^4=20615673^4,$$
con ciò provando la *falsità* della congettura.

❑ Ancora: Pierre de Fermat (1601-1665) aveva fiducia nel fatto che i numeri della forma $2^{2^n}+1$ fossero tutti primi. Ai suoi tempi non esistevano né i computer né le macchine calcolatrici, per cui egli si limitò a considerare i casi
$$n=1:\ 2^{2^1}+1=5,\quad n=2:\ 2^{2^2}+1=17,\quad n=3:\ 2^{2^3}+1=257,\quad n=4:\ 2^{2^4}+1=65537;$$
… e tuttavia, se si va a fare il calcolo col valore successivo $n=5$, si ottiene $2^{2^5}+1=4294967297$ che *non è* un numero primo (già Eulero riconobbe che è divisibile per 641).

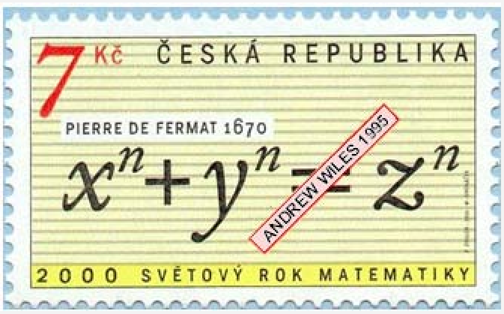
In quanto alla congettura di Goldbach, nell'anno 2000 accadde persino che una casa editrice, per scopi pubblicitari, mettesse in palio una ricompensa di un milione di dollari per chi fosse riuscito, entro il mese di aprile del 2002, a dimostrarla. Il ghiotto premio restò non aggiudicato, e ad oggi questa questione di teoria dei numeri è rimasta irrisolta, anche se sono stati provati parecchi interessanti teoremi ad essa correlati.

Qualche altro esempio di **congetture di teoria dei numeri semplici da enunciare, e che tuttavia non sono ancora state né provate né smentite**? Eccone qui di seguito quattro.
- Esiste un numero perfetto dispari? (Si dice "perfetto" un intero che sia uguale alla somma dei suoi divisori, inclusa l'unità ed escluso il numero stesso; ad esempio $6=1+2+3$ e $28=1+2+4+7+14$)
- I numeri primi della forma n^2+1 (ossia, superiori di un'unità a un quadrato perfetto) sono infiniti?
- Esistono infinite coppie di numeri primi "gemelli" (= che differiscono di due unità, come 5 e 7 o 59 e 61)?
- Esiste sempre un numero primo compreso tra due quadrati perfetti consecutivi?

Invece **è stato dimostrato vero, dall'inglese Andrew Wiles in modo definitivo nel 1995, che**

♥ **SE $n>2$, NON ESISTE ALCUNA TERNA DI INTERI a, b, c TUTTI $\neq 0$ PER CUI $a^n+b^n=c^n$**
Questa congettura era nota come "ULTIMO TEOREMA DI FERMAT" perché Pierre de Fermat, uno studioso del XVII secolo, aveva lasciato scritto, su di una copia del trattato *Arithmetica* di Diofanto:
"*Dispongo di una meravigliosa dimostrazione di questo teorema, che non può essere contenuta nel margine troppo stretto della pagina*".
Pressoché tutti i matematici tuttavia ritengono, data l'estrema complessità della questione, confermata dalla raffinatezza degli strumenti moderni di cui si servì Wiles nel suo lavoro, **che Fermat in realtà si sbagliasse quando sosteneva di saper giustificare l'enunciato in modo corretto.**

ESERCIZI



1) Il 40 si può esprimere come somma di due primi in 3 modi (40 = 3+37, 40 = 11+29, 40 = 17+23). Il 100 in 6 modi: quali?

2) Tra le seguenti catene, quale dimostra che la somma fra un multiplo di 12 e un multiplo di 30 è sempre un multiplo di 6?
   a) $12n+30=6(2n+5)$
   b) $n\cdot 12+n\cdot 30=2\cdot 6n+5\cdot 6n=7\cdot 6n=7n\cdot 6$
   c) $12n+30m=6(2n+5m)$

LA FORMULA DI GAUSS PER LA SOMMA DEGLI INTERI DA 1 FINO A n

Dovendo eseguire una somma di tanti interi consecutivi a partire da 1, quale ad esempio $1+2+3+...+27$, possiamo pensare di procedere così:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & .... & + & 25 & + & 26 & + & 27 \\ S & = & 27 & + & 26 & + & 25 & + & .... & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S & = & 28 & + & 28 & + & 28 & + & .... & + & 28 & + & 28 & + & 28 \end{array}$$

[27 addendi, tutti uguali a 28]

quindi $2S = 27 \cdot 28$ da cui $\boxed{S = \dfrac{27 \cdot 28}{2} = 378}$

Passando ora più in generale alla somma $1+2+3+...+n$ dei primi n interi positivi, avremo:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & .... & + & (n-2) & + & (n-1) & + & n \\ S & = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & .... & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S & = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & .... & + & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

[n addendi, tutti uguali a $(n+1)$]

$2S = n \cdot (n+1)$ da cui $S = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$

♥ Ecco dunque la bella formula $\boxed{1+2+3+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}}$ **FORMULA DI GAUSS**

detta "di Gauss" in onore del grande matematico tedesco (1777-1855)
che fu capace di costruirsela in modo autonomo quando era solo un bambino.

Ad esempio, $1+2+3+4 = \dfrac{4 \cdot 5}{2} = 10$; $1+2+3+...+10 = \dfrac{10 \cdot 11}{2} = 55$; $1+2+3+...+90 = \dfrac{90 \cdot 91}{2} = 4095$.

ESERCIZI

3) Quanto vale la somma degli interi positivi da 1 fino a 40? E da 1 fino a 1000?
4) Come calcoleresti la somma degli interi positivi da 100 compreso fino a 200?
5) Quanto vale la somma $2+4+6+...+1000$?
6) Quanto vale la somma $1+3+5+...+999$?

QUADRATI MAGICI

Si dice "quadrato magico" una tabella di 2×2, oppure di 3×3, o di 4×4, … , numeri,
con la proprietà che la somma dei numeri su ogni riga, o colonna, o diagonale, sia sempre la stessa.
Questa somma costante è chiamata la *costante di magia* o *costante magica* o *somma magica* del quadrato.
Se un quadrato magico $n \times n$ ha come termini gli interi da 1 fino a n^2, allora è detto *perfetto* o *normale*;
e nel caso dei quadrati magici perfetti, si può dimostrare che la costante magica è sempre data da $\dfrac{n(n^2+1)}{2}$.

Ad esempio, qui a fianco è rappresentato un quadrato magico perfetto 3×3 (cioè: "di ordine 3").
La costante magica è $\dfrac{3 \cdot (3^2+1)}{2} = 15$.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

ESERCIZI

7) Completa il quadrato perfetto di ordine 4 nella figura riportata qui a destra.

1			
		7	
	10	11	
13			16

8) Il fatto che nei quadrati magici perfetti di ordine n, la costante magica sia $\dfrac{n(n^2+1)}{2}$,

si può dimostrare con facilità a partire dalla formula di Gauss $1+2+3+...+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$. In che modo?

RISPOSTE 1) $3+97$, $11+89$, $17+83$, $29+71$, $41+59$, $47+53$ 2) c 3) 820; 500500
4) Sottraendo dalla somma fino a 200 quella fino a 99. Si ottiene 15150
5) $2(1+2+3+...+500) = 250500$ 6) $(1+2+3+...+1000)-(2+4+6+...+1000) = 500500-250500 = 250000$
8) Un quadrato magico perfetto di ordine n contiene tutti gli interi successivi da 1 fino a n^2, distribuiti in n righe e in n colonne. Quanto vale la somma degli interi da 1 a n^2? Dividendo il risultato per il numero n delle righe o colonne (= moltiplicandolo per $1/n$), e semplificando, si ha il valore della costante magica.