5. IL CONCETTO DI "EQUAZIONI EQUIVALENTI"

Riassumendo all'osso:

♥ **in un'equazione noi possiamo fare sul primo membro una determinata operazione, purché però contemporaneamente facciamo la stessa operazione anche sul secondo membro, e purché** … attenzione, è molto importante … **PURCHE' SI POSSA "TORNARE INDIETRO",** vale a dire: **dall'equazione così ottenuta si possa nuovamente ricavare l'equazione iniziale (e questa soltanto).**

ESEMPIO

Dall'equazione

(1) $x^2 = 5x + 4$

io posso passare alla

(2) $x^2 - 5x = 4$

essendo sicuro che la (1) e la (2) saranno equivalenti, cioè avranno le stesse soluzioni (ogni soluzione di (1) è anche soluzione di (2), E VICEVERSA).

Infatti:

A) a partire dall'uguaglianza

(1) $x^2 = 5x + 4$

sottraggo $5x$ da ENTRAMBE le parti e ottengo la (2)

$x^2 - 5x = \cancel{5x} + 4 \cancel{-5x}$

ragionando così:

se due numeri sono uguali, sottraendo da entrambi uno stesso numero si perviene ancora a numeri uguali, perciò, se un dato valore di x è soluzione di (1)*, si è certi che il medesimo valore di x sarà soluz. anche di* (2)*; insomma: ogni soluzione di* (1) *è sicuramente anche soluzione di* (2). Dunque: $(1) \Rightarrow (2)$

B) E VICEVERSA,

dalla

(2) $x^2 - 5x = 4$

si può ricavare come conseguenza la (1):

$x^2 \cancel{-5x} \cancel{+5x} = 4 + 5x$

Il simbolo $\Rightarrow$ è quello di "implicazione logica": "se … allora … , qualunque sia il valore di x considerato"

se due numeri sono uguali, allora, addizionando a entrambi uno stesso numero, si perviene a numeri uguali, perciò, se un dato valore di x è soluzione di (2)*, si è certi che il medesimo valore di x sarà soluz. anche di* (1)*; insomma: ogni soluzione di* (2) *è sicuramente anche soluzione di* (1). Dunque: $(2) \Rightarrow (1)$

CONTROESEMPIO

Se dall'equazione

(1) $x = 2x - 5$

io passo alla

(2) $x^2 = (2x - 5)^2$

potrò essere sicuro che ogni soluzione di (1) è anche soluzione di (2)

(*se due numeri sono uguali, allora saranno uguali anche i loro quadrati, perciò, se un dato valore di x è soluzione di* (1)*, si è certi che il medesimo valore di x sarà soluzione anche di* (2));

PERO' NON E' DETTO che valga anche il viceversa, ossia:

NON posso essere sicuro che ogni soluzione di (2) sia anche soluz. di (1), in quanto *se i quadrati di due numeri sono uguali, allora i due numeri in gioco non è detto che siano per forza uguali: potrebbero pure essere opposti!*

Questa volta, dunque, vale l'implicazione $(1) \Rightarrow (2)$ ma NON vale l'implicazione inversa: $\cancel{(2) \Rightarrow (1)}$

per cui l'equazione (1) potrebbe non essere equivalente alla (2);

e in effetti si vede che non lo è, perché, mentre la (1) ammette come unica soluzione $x = 5$,

la (2) invece ammette come soluzioni $x = 5$ e anche $x = 5/3$.

♥ **Due equazioni si dicono "EQUIVALENTI" se hanno le stesse soluzioni, ossia se ogni soluzione della prima è anche soluzione della seconda, E VICEVERSA.**

Le regole esposte alla pagina precedente sono "**PRINCIPI DI EQUIVALENZA**", ossia consentono di passare da un'equazione assegnata ad un'altra, certamente equivalente a quella di partenza; il **criterio generale** per passare da un'equazione ad un'altra, che sia sicuramente equivalente alla prima, è quello esposto nel riquadro in cima a questa pagina, riassumibile nello schema logico:

♥ **(1) è equivalente a (2) quando valgono ENTRAMBE le implicazioni $(1) \Rightarrow (2)$ e $(2) \Rightarrow (1)$ vale a dire, quando vale la DOPPIA IMPLICAZIONE $(1) \Leftrightarrow (2)$**

(l'implicazione $(1) \Rightarrow (2)$, da sola, ci assicura soltanto che ogni soluzione di (1) sarà pure soluzione di (2), ma non ci dice nulla riguardo al viceversa, che potrebbe anche non avvenire)