6. I PRINCIPI DI EQUIVALENZA DELLE EQUAZIONI

Ricordiamo che due equazioni si dicono "equivalenti" fra loro quando hanno le stesse soluzioni;
quando, cioè, ogni soluzione della prima è anche soluzione della seconda, E VICEVERSA.

Ad esempio, le due equazioni $2(x-4)=x$ e $x+1=9$ sono fra loro equivalenti, perché entrambe hanno come unica soluzione $x=8$; due equazioni che siano entrambe impossibili sono equivalenti fra loro; le due equazioni $(x-2)(x-3)=0$ e $x^2+6=5x$ sono equivalenti, perché per entrambe l'insieme delle soluzioni è $S=\{2,\ 3\}$.
Invece le equazioni $x-2=0$ e $x^2=4$ NON sono equivalenti, in quanto l'insieme delle soluzioni della prima è $S_1=\{2\}$ mentre l'insieme delle soluzioni della seconda è $S_2=\{-2,\ +2\}$.

1° Principio di Equivalenza delle Equazioni

Data un'equazione $\mathbf{A}(x)=\mathbf{B}(x)$, addizionando o sottraendo ad entrambi i membri uno stesso numero, oppure una stessa espressione contenente *x*, e che esiste per qualsiasi valore di *x*, si ottiene con certezza un'equazione equivalente a quella iniziale.

Dimostriamolo.
Partiamo dall'equazione
(1) $\mathrm{A}(x)=\mathrm{B}(x)$,
e addizioniamo ad entrambi i membri una stessa espressione $\mathrm{C}(x)$ che esiste per qualsiasi valore di x.
Vogliamo dimostrare che la nuova equazione
(2) $\mathrm{A}(x)+\mathrm{C}(x)=\mathrm{B}(x)+\mathrm{C}(x)$
è equivalente alla (1), ossia ha le stesse soluzioni della (1).

Supponiamo dunque che un dato numero α sia soluzione della (1).
Allora quel numero α sarà tale che, sostituendolo al posto di x nella (1), si ottenga un'uguaglianza vera;
sarà dunque vera l'uguaglianza
$\mathrm{A}(\alpha)=\mathrm{B}(\alpha)$;
quindi sarà pure vera l'uguaglianza
$\mathrm{A}(\alpha)+\mathrm{C}(\alpha)=\mathrm{B}(\alpha)+\mathrm{C}(\alpha)$ (osserviamo che l'ipotesi ci *garantisce* l'esistenza del numero $\mathrm{C}(\alpha)$)
perché, se un'uguaglianza è vera, ovviamente sarà vera anche qualsiasi uguaglianza ottenibile dalla prima addizionando ad entrambi i suoi membri uno stesso numero.
Ma se è vera l'uguaglianza
$\mathrm{A}(\alpha)+\mathrm{C}(\alpha)=\mathrm{B}(\alpha)+\mathrm{C}(\alpha)$
ciò significa che il numero α è soluzione della (2).

Con ciò abbiamo provato che ogni soluzione della (1) è soluzione pure della (2).

Vediamo se vale anche il viceversa.

Supponiamo che un dato numero α sia soluzione della (2).
Allora quel numero α sarà tale che, sostituendolo al posto di x nella (2), si ottenga un'uguaglianza vera;
sarà dunque vera l'uguaglianza
$\mathrm{A}(\alpha)+\mathrm{C}(\alpha)=\mathrm{B}(\alpha)+\mathrm{C}(\alpha)$;
quindi sarà pure vera l'uguaglianza
$\mathrm{A}(\alpha)=\mathrm{B}(\alpha)$,
perché, se un'uguaglianza è vera, ovviamente sarà anche vera qualsiasi uguaglianza ottenibile dalla prima sottraendo da entrambi i suoi membri uno stesso numero ($\mathrm{C}(\alpha)$ nel nostro caso).
Ma se è vera l'uguaglianza
$\mathrm{A}(\alpha)=\mathrm{B}(\alpha)$
ciò significa che il numero α è soluzione della (1).

Quanto abbiamo visto prova che ogni soluzione della (2) è soluzione pure della (1).

E allora, ricapitolando:
ogni soluzione della (1) è pure soluzione della (2); ogni soluzione della (2) è pure soluzione della (1);
… le due equazioni (1) e (2) hanno le stesse soluzioni, sono equivalenti!

Evidentemente i ragionamenti di cui sopra valgono anche nel caso in cui, anziché addizionare ai due membri una stessa *espressione* $\mathrm{C}(x)$, noi addizioniamo ad essi uno stesso *numero* k.

Per quanto riguarda poi la possibilità di *sottrarre* (anziché addizionare) un numero o un'espressione,
la dimostrazione è del tutto analoga e la lasciamo al lettore.

Dal 1° Principio di Equivalenza delle Equazioni dipendono le seguenti REGOLE di cui ci siamo già occupati:

- se a 1° e a 2° membro ci sono due termini (=addendi di somma algebrica) uguali, li possiamo mandar via
- possiamo trasportare un termine dall'altra parte del simbolo "=", cambiandolo però di segno
  ("REGOLA DEL TRASPORTO PER LA SOMMA ALGEBRICA")

2° Principio di Equivalenza delle Equazioni

Data un'equazione $A(x) = B(x)$, moltiplicando o dividendo entrambi i membri per uno stesso numero diverso da 0, oppure per una stessa espressione contenente *x*, a patto però che questa espressione esista per qualsiasi valore di *x* e non si annulli per nessun valore di *x*, si ottiene certamente un'equazione equivalente a quella di partenza.

Partiamo dall'equazione (1) $A(x) = B(x)$, e moltiplichiamone ambo i membri per un'espressione $C(x)$, che esista per qualsiasi valore di *x*: $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists C(x)$ e che non si annulli mai: $\forall x \in \mathbb{R},\ C(x) \neq 0$.
Vogliamo dimostrare che la nuova equazione (2) $A(x) \cdot C(x) = B(x) \cdot C(x)$
è equivalente alla (1), ossia ha le stesse soluzioni della (1).

Supponiamo che un dato numero α sia soluzione della (1). Allora quel numero α sarà tale che, sostituendolo al posto di *x* nella (1), si ottenga un'uguaglianza vera; sarà dunque vera l'uguaglianza $A(\alpha) = B(\alpha)$; quindi sarà pure vera l'uguaglianza $A(\alpha) \cdot C(\alpha) = B(\alpha) \cdot C(\alpha)$, perché, se un'uguaglianza è vera, ovviamente sarà vera anche qualsiasi uguaglianza ottenibile da essa moltiplicandone entrambi i membri per uno stesso numero. Ma se è vera l'uguaglianza $A(\alpha) \cdot C(\alpha) = B(\alpha) \cdot C(\alpha)$, ciò significa che il numero α è soluzione della (2).

Con ciò abbiamo provato che ogni soluzione della (1) è soluzione pure della (2).

Vediamo se vale anche il viceversa. Supponiamo che un dato numero α sia soluzione della (2).
Allora quel numero α sarà tale che, sostituendolo al posto di *x* nella (2), si ottenga un'uguaglianza vera; sarà dunque vera l'uguaglianza $A(\alpha) \cdot C(\alpha) = B(\alpha) \cdot C(\alpha)$; quindi sarà pure vera l'uguaglianza $A(\alpha) = B(\alpha)$, perché, se un'uguaglianza è vera, ovviamente sarà anche vera qualsiasi uguaglianza ottenibile dalla prima dividendone entrambi i membri per uno stesso numero diverso da 0 (qui interviene l'ipotesi $C(x) \neq 0\ \ \forall x \in \mathbb{R}$).
Ma se è vera l'uguaglianza $A(\alpha) = B(\alpha)$, ciò significa che il numero α è soluzione della (1).

Quanto abbiamo visto prova che ogni soluzione della (2) è soluzione pure della (1).

Allora, ricapitolando: ogni soluzione della (1) è soluzione della (2); vale anche il viceversa;
… pertanto le due equazioni (1) e (2) hanno le stesse soluzioni, sono equivalenti.

Evidentemente i ragionamenti di cui sopra valgono anche nel caso in cui, anziché moltiplicare i due membri per una stessa *espressione* $C(x)$ che non si annulla mai, noi li moltiplichiamo per uno stesso *numero* $k \neq 0$.

Per quanto riguarda poi la possibilità di *dividere* (anziché di moltiplicare) per un numero non nullo o per un'espressione sempre esistente e mai nulla, la dimostrazione è del tutto analoga e la lasciamo al lettore.

Dal 2° Principio di Equivalenza delle Equazioni dipendono le seguenti REGOLE di cui ci siamo già occupati:

- se tanto il 1° che il 2° membro sono due frazioni con lo stesso denominatore, possiamo mandar via i due denominatori uguali
- possiamo semplificare tutti i termini per uno stesso numero
- possiamo cambiare di segno tutti i termini (=addendi delle due somme algebriche a 1° e a 2° membro)
- "ciò che moltiplica da una parte dell' "=", divide dall'altra; ciò che divide da una parte, moltiplica dall'altra" ("REGOLA DEL TRASPORTO PER LA MOLTIPLICAZIONE /DIVISIONE")

E' importante tener presente che si può essere certi di pervenire a un'equazione equivalente a quella iniziale solo se l'espressione C(*x*) che entra in gioco
♪ esiste sempre, nel caso del 1° Principio;
♫ esiste sempre e non si annulla mai, nel caso del 2° Principio.

- Consideriamo, come controesempio, la coppia di equazioni $x+1=3$ e $x+1+\frac{1}{x-2}=3+\frac{1}{x-2}$.
  Qui la seconda è ottenibile dalla prima addizionando una stessa espressione ad entrambi i membri; ma si osserva che l'espressione stessa non rispetta la condizione di esistere sempre, per qualsiasi *x* (in effetti, per via del denominatore, non esiste con $x = 2$).
  NON siamo quindi certi che le due equazioni siano equivalenti; potrebbero esserlo, ma anche non esserlo.
  E in effetti non lo sono, perché, mentre la prima ha come soluzione $x = 2$, la seconda è impossibile.
- Un altro controesempio. Le due equazioni $2x = x+1$ e $2x(x-3) = (x+1)(x-3)$ NON sono equivalenti (la prima ha come unica soluzione $x = 1$, la seconda ha una soluzione in più, essendo verificata sia per $x = 1$, che per $x = 3$). Eppure la 2^a equazione è ottenibile dalla 1^a tramite moltiplicazione per $(x-3)$ …
  … Però l'espressione $(x-3)$ si può annullare, quindi non sono rispettati i requisiti del 2° Principio.

Terminiamo col ricordare (l'avevamo già osservato a pag. 151) che ELEVANDO AL QUADRATO i 2 membri di una equazione NON si è certi di pervenire ad un'equazione equivalente a quella iniziale; infatti l'equazione così ottenuta conserva, sì, tutte le soluzioni dell'equazione data, ma può accadere che ne acquisti in più delle altre "estranee" all'equazione di partenza, perciò non accettabili.