PROPORZIONI E PROPORZIONALITA'

1. PROPORZIONI

Si dice "**proporzione**" un'**uguaglianza fra due rapporti** (= quozienti).

Esempio

$\mathbf{12:16=15:20}$

Questa proporzione è corretta, perché effettivamente i due rapporti (= quozienti)

12:16 e 15:20

sono uguali fra loro (valgono entrambi ¾, o, se si preferisce: 0,75).

Di solito si legge "**12 *sta a* 16 *come* 15 *sta a* 20**",
proprio per evidenziare il fatto che si va a confrontare il "peso di un numero rispetto all'altro":
12, nei confronti di 16, è i ¾ e quindi è proprio come 15 nei confronti di 20.

ESERCIZI (risposte in fondo a questa pagina)

a) Quanto deve valere *x* se si vuole che la proporzione $24:12=x:11$ sia corretta?
b) Quanto deve valere *y* se si vuole che la proporzione $5:15=y:18$ sia corretta?
c) Quanto deve valere *z* se si vuole che la proporzione $6:4=30:z$ sia corretta?

Un po' di **terminologia**.

In una proporzione,

- i due dividendi (cioè: il 1° e il 3° termine) si dicono "**antecedenti**";
- i due divisori (cioè: il 2° e il 4° termine) si dicono "**conseguenti**";

antecedenti
$\overset{\uparrow}{12}:\underset{\downarrow}{16}=\overset{\uparrow}{15}:\underset{\downarrow}{20}$
conseguenti

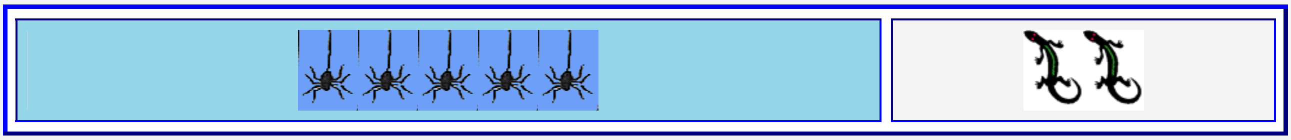
- il 1° e il 4° termine si dicono "**estremi**";
- il 2° e il 3°, "**medi**".

estremi
$\overset{\nearrow}{12}:\underset{\downarrow}{16}=\underset{\downarrow}{15}:\overset{\nwarrow}{20}$
medi

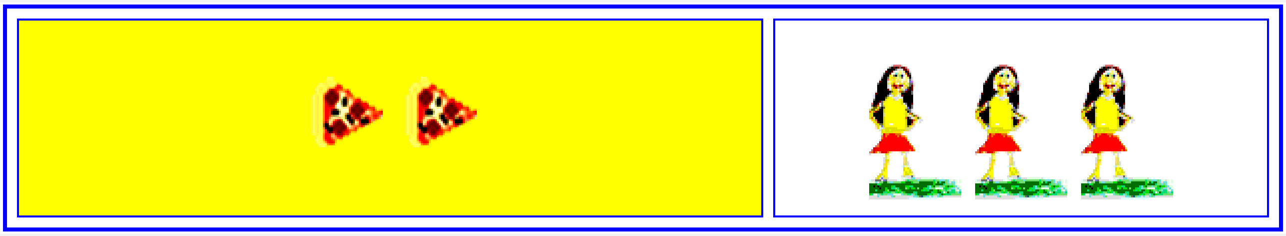
Dal sito http://math.rice.edu/~lanius/Lessons/index.html di Cynthia Lanius (USA) :

All About Ratios (*ratio = rapporto, sia in Latino che in Inglese*!)

1. If you have spiders to lizards at the ratio below and have 12 lizards,
   how many spiders do you have?



2. If you have pizza slices to girls at the ratio below, and if you have 33 girls,
   how many slices of pizza do you have?



Risposte agli esercizi di questa pagina:

a) Il quoziente 24:12 vale 2, quindi anche il quoziente *x*:11 dovrà valere 2,
e ciò avviene a condizione che *x* sia uguale a 22.
Anche: così come 24 è il doppio di 12, altrettanto *x* dovrà essere il doppio di 11 da cui $x = 22$.

b) Così come 5 è la terza parte di 15, anche *y* dovrà essere la terza parte di 18. Perciò $y = 6$.

c) 6:4 =1,5 ossia il 6 è 1 volta e mezza il 4. Il 30 è una volta e mezza … che cosa? 20, evidentemente!
Anche ragionando "da destra a sinistra":
z, rispetto al 30, dovrà avere lo stesso "peso" che ha il 4 rispetto al 6.
Ma 4 è i 4/6 di 6, cioè i 2/3 di 6, e allora *z* dovrà essere i 2/3 di 30, cioè 20.

PROPRIETA' FONDAMENTALE DELLE PROPORZIONI

In una proporzione, il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi;

E, VICEVERSA (importante!!!),

se 4 numeri non nulli sono tali che il prodotto di due di essi è uguale al prodotto degli altri due, allora con tali quattro numeri si può costruire una proporzione, a patto di prendere come medi (o come estremi) i fattori di un medesimo prodotto.

Brevemente:
se a, b, c, d sono quattro numeri non nulli,
vale la **doppia implicazione**

$$\mathbf{a : b = c : d \Leftrightarrow ad = bc}$$

Dimostrazione $\quad a : b = c : d \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd} \Leftrightarrow ad = bc$

♥ Il simbolo $\Leftrightarrow$ è quello di "biimplicazione logica": "*se … allora … e viceversa*", *per qualsiasi valore delle lettere coinvolte*

♥ E' davvero di grande importanza tener presente che **questa proprietà consta di DUE enunciati**: un enunciato **diretto**, e il rispettivo **inverso** (*).

Essa fornisce perciò una condizione NECESSARIA E SUFFICIENTE affinché quattro numeri non nulli, presi in un dato ordine, formino una proporzione valida.

(*) Per verificare se una proporzione è corretta, anziché calcolare i due quozienti per vedere se coincidono, **si può andare a vedere se il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi**: così facendo si applica, appunto, la "Proprietà Fondamentale" … precisamente - nota bene! - nel suo "aspetto **INVERSO**"!

La Proprietà Fondamentale delle proporzioni ha importanti **CONSEGUENZE**.
Ad esempio, supponiamo che in una proporzione siano noti i primi tre termini ma non il quarto; allora si può scrivere

$$a : b = c : x; \quad ax = bc; \quad x = \frac{bc}{a}.$$

E in generale, è facile vedere che:

se il termine incognito è un estremo, sarà uguale al prodotto dei medi FRATTO l'estremo noto;
se il termine incognito è un medio, sarà uguale al prodotto degli estremi FRATTO il medio noto

Esempio:

$$\mathbf{25 : x = 20 : 12 \qquad x = \frac{\overset{5}{\cancel{25}} \cdot \overset{3}{\cancel{12}}}{\cancel{20}_{\cancel{4}}} = 15}$$

Se più termini di una proporzione sono espressi in funzione di una stessa incognita *x*, la proporzione si può interpretare come un'equazione che permetterà di trovare il valore di *x*.

Applicare la Proprietà Fondamentale è in questo caso un modo veloce e comodo per liberarsi dai denominatori.

Esempio:

$$\mathbf{(x+4) : 10 = (2x+1) : 15}$$
$$\mathbf{(x+4) \cdot 15 = 10 \cdot (2x+1)}$$
$$15x + 60 = 20x + 10$$
$$-5x = -50$$
$$x = 10$$

In alternativa, si poteva trasformare in una "classica" equazione coi denominatori:

$$(x+4) : 10 = (2x+1) : 15$$
$$\frac{x+4}{10} = \frac{2x+1}{15}; \quad \frac{3(x+4)}{\cancel{30}} = \frac{2(2x+1)}{\cancel{30}} \quad \text{ecc.}$$

Le proporzioni godono di diverse altre **proprietà**, che si possono facilmente dimostrare con semplici passaggi algebrici, utilizzando eventualmente la "Proprietà Fondamentale".
Queste proprietà permettono, a partire da una proporzione fissata $\boxed{\mathbf{a : b = c : d}}$,
di ricavarne altre, che saranno corrette anch'esse *se e solo se* lo è quella di partenza.
Ecco qui di seguito un elenco delle **PROPRIETÀ DELLE PROPORZIONI**.

b : a = d : c (**invertire**)
a : c = b : d (**permutare i medi**)
d : b = c : a (**permutare gli estremi**)

$\left.\begin{array}{l}\mathbf{(a \pm b) : a = (c \pm d) : c} \\ \mathbf{(a \pm b) : b = (c \pm d) : d}\end{array}\right]$ (**comporre e scomporre**) *In una proporzione, la somma del 1° e del 2° termine sta al 1° (o al 2°) come la somma del 3° e del 4° sta al 3° (o al 4°). Idem per la differenza.*

$\left.\begin{array}{l}\mathbf{(a \pm c) : (b \pm d) = a : b} \\ \mathbf{(a \pm c) : (b \pm d) = c : d}\end{array}\right]$ **(comporre e scomporre applicato agli antecedenti e ai conseguenti)** *In una proporzione, la somma (o la differenza) degli antecedenti sta alla somma (o alla differenza) dei conseguenti, come ciascun antecedente sta al proprio conseguente.*

ESERCIZIO: parti da una proporzione corretta di tua invenzione e controlla che le varie proporzioni ottenibili da quella applicando le varie proprietà di cui sopra, sono ancora corrette.

- **Dimostriamo**, ad esempio, la proprietà del **permutare i medi**:

$$a : b = c : d \underset{(\text{NOTA})}{\Leftrightarrow} bc = ad \underset{(\text{NOTA})}{\Leftrightarrow} a : c = b : d \qquad \text{NOTA - Proprietà Fondamentale}$$

- Come ulteriore esempio, **dimostriamo** una delle proprietà denominate "del **comporre**":

$$a : b = c : d \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \Leftrightarrow (a+b) : b = (c+d) : d$$

Alle proprietà sopra elencate si può aggiungere la seguente, relativa alle "catene di rapporti uguali":
"**data una CATENA DI RAPPORTI UGUALI, la somma di tutti gli antecedenti sta alla somma di tutti i conseguenti come ciascun antecedente sta al proprio conseguente**".

Es.: dalla catena $14 : 7 = 6 : 3 = 10 : 5$ si possono ricavare le 3 proporzioni $(14+6+10) : (7+3+5) = \left\langle \begin{array}{l} 14 : 7 \\ 6 : 3 \\ 10 : 5 \end{array}\right.$

Applicazione: trovare 3 numeri sapendo che la loro somma è 90 e che sono proporzionali ai numeri 4, 11, 3 (o, come anche si dice, "stanno fra loro come 4:11:3")

$x : 4 = y : 11 = z : 3 \quad (x+y+z) : (4+11+3) = x : 4 \quad 90 : 18 = x : 4 \quad x = \frac{90 \cdot 4}{18} = 20$ ... e analogamente per y, z

Il quarto termine di una proporzione è detto "QUARTO PROPORZIONALE dopo i primi tre termini".

Ad esempio, nella proporzione 8:6 = 12:9 abbiamo che 9 è il quarto proporzionale dopo 8, 6, 12.

- *Trovare il quarto proporzionale dopo* 24, 6, 8

$\boxed{24 : 6 = 8 : x}$ da cui: $x = \frac{6 \cdot 8}{24} = 2$ (anche molto più semplicemente: così come 24 è il quadruplo di 6, 8 è il quadruplo di cosa? Di 2, è ovvio!)

Una proporzione in cui i due medi sono uguali si dice "PROPORZIONE CONTINUA".

Ad esempio, 9:6 = 6:4 è una proporzione continua.

In una proporzione continua, ciascuno dei due medi uguali si dice "MEDIO PROPORZIONALE fra il 1° e il 4° termine".

Ad esempio, in 9:6 = 6:4 , il 6 è medio proporzionale fra 9 e 4.

- *Trovare il medio proporzionale fra* 2 *e* 32

$\boxed{2 : x = x : 32} \qquad x^2 = 2 \cdot 32; \qquad x^2 = 64; \qquad x = 8$ (oppure $x = \pm 8$, a seconda del contesto)

ESERCIZI

1) Verifica che le seguenti proporzioni sono tutte corrette,
controllando che in ciascuna il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi

a) $12:16=15:20$ b) $12:6=6:3$ c) $40:12=100:30$ d) $1{,}2:2{,}16=1{,}5:2{,}7$

2) Determina il termine incognito nelle seguenti proporzioni,
pensando direttamente all'uguaglianza dei due rapporti e quindi *senza applicare le formule* "prodotto dei medi fratto l'estremo noto", "prodotto degli estremi fratto il medio noto"

a) $6:3=x:5$ b) $6:3=5:x$ c) $15:3=35:x$ d) $15:3=x:4$
e) $1:2=2:x$ f) $x:10=4:8$ g) $3:4=x:28$ h) $2:3=x:10$
i) $4:3=x:12$ j) $x:4=6:30$ k) $40:50=x:2$ l) $18:x=30:40$
m) $7:y=6:3$ n) $24:8=z:11{,}25$ o) $t:2{,}6=12:8$ p) $0{,}05:5=x:0{,}2$

3) Determina il termine incognito nelle seguenti proporzioni, *applicando le formule* "prodotto dei medi fratto l'estremo noto", "prodotto degli estremi fratto il medio noto"

a) $12:20=18:x$ b) $10:25=x:10$ c) $x:3=4:5$ d) $15:x=35:30$
e) $12:5=x:8$ f) $x:\frac{3}{4}=\frac{2}{3}:\frac{4}{5}$ g) $x:2{,}4=3{,}2:5$ h) $0{,}8:0{,}2=0{,}1:x$

4) Le seguenti proporzioni contengono più volte un'incognita. Determina il valore di questa.

a) $18:(x+4)=15:x$ b) $(x+2):14=(x+3):16$ c) $x:(x+1)=(x+2):(x+7)$
d) $h:(h-2)=(h-3):h$ e) $(w+1{,}2):4=(w-1{,}2):3$ f) $a:(2a+3)=5:10$

5) Determina il *quarto proporzionale* dopo:

a) 4, 8 e 10 b) 5, 15 e 15 c) 40, 25 e 32 d) 3, 4 e 5
e) 3; 3,3; 4 f) 2,5; 3,6; 4,7 g) $3^7,\ 3^{11},\ 3^{10}$ h) $5\cdot 10^{12},\ 3\cdot 10^{13},\ 2\cdot 10^8$

6) Determina il *medio proporzionale* (positivo) fra:

a) 3 e 48 b) 24 e 6 c) 2 e 3 d) 2,5 e 6,4
e) 3^7 e 3^{11} f) 3,3 e $3{,}\overline{3}$ g) 1 e 5^6 h) 100 e 1000

7) **Dividere un numero in parti proporzionali a due numeri dati**

Dividere il numero 30 in parti proporzionali ai numeri 5 e 7 significa trovare due numeri *x*, *y* tali che
I) $x+y=30$
II) $x:5=y:7$.

Se, partendo dalla proporzione, si applica la proprietà del "comporre gli antecedenti e i conseguenti",
si ottiene: $\underbrace{(x+y)}_{30}:(5+7)=\left\langle\begin{matrix}x:5\\y:7\end{matrix}\right.$ da cui: $x=12{,}5;\ y=17{,}5$

In generale, comunque, per dividere un numero *c* in due parti proporzionali ai due numeri *a* e *b*, basta dividere *c* per la somma $a+b$ poi moltiplicare il risultato ottenuto prima per *a* poi per *b*.

Dividi il numero dato in parti proporzionali ai numeri a fianco specificati:

a) 30; 1 e 4 b) 30; 2 e 3 c) 100; 2 e 3 d) 1; 9 e 11
e) 0,07; 5 e 9 f) 30; 5 e 2 g) 72; 3 e 5 h) 72; 2 e 3

8) Pierino, alla richiesta di determinare *x* nella proporzione $x:(x-4)=20:15$, scrive: $x=\frac{(x-4)\cdot 20}{15}$,
ma non è molto convinto di questo procedimento. Cosa gli consiglieresti?

RISULTATI

2a) 10 2b) 2,5 2c) 7 2d) 20 2e) 4 2f) 5 2g) 21 2h) 20/3
2i) 16 2j) 4/5 2k) 8/5 2l) 24 2m) 3,5 2n) 33,75 2o) 3,9 2p) 0,002
3a) 30 3b) 4 3c) 12/5 3d) 90/7 3e) 96/5 = 19,2 3f) 5/8 3g) 1,536 3h) 0,025
4a) 20 4b) 5 4c) 1/2 4d) 6/5 4e) 8,4 4f) impossibile
5a) 20 5b) 45 5c) 20 5d) 20/3 5e) 4,4 5f) 6,768 5g) 3^{14} 5h) $1{,}2\cdot 10^9$
6a) 12 6b) 12 6c) $\sqrt{6}\approx 2{,}45$ 6d) 4 6e) 3^9 6f) $\sqrt{11}\approx 3{,}317$ 6g) 5^3 6h) $\sqrt{100000}\approx 316$
7a) 6 e 24 7b) 12 e 18 7c) 40 e 60 7d) 0,45 e 0,55 7e) 0,025 e 0,045 7f) $150/7\approx 21{,}4$ e $60/7\approx 8{,}6$
7g) 27 e 45 7h) 28,8 e 43,2 8) Di fare *prodotto dei medi = prodotto degli estremi* poi risolvere l'equazione