2. PROPORZIONALITA' DIRETTA E INVERSA

a) PROPORZIONALITA' DIRETTA

"Se le mie ore di lavoro sono il doppio, anche il guadagno è il doppio".

Così riflette questa paziente e volonterosa signora immigrata,
che viene chiamata da famiglie italiane per fare qualche servizio di pulizia nelle case.

- 8 euro per 1 ora di pulizia;
- 16 euro per 2 ore, dunque,
- 24 euro per 3 ore,
- 32 euro per 4 ore,
- ecc.

Se *raddoppiano* le *ore* lavorate, *raddoppia* anche il *guadagno*;
se *triplicano* le *ore* lavorate, *triplica* il *guadagno*,
... ecc.

Vale la formula $\boxed{euro = 8 \cdot ore}$ da cui, ad esempio,

- se $ore = 5$, si avrà $euro = 8 \cdot 5 = 40$;
- se $ore = 5 \cdot 2 = 10$ $(il\ doppio\ di\ prima)$,
  sarà $euro = 8 \cdot (5 \cdot 2) = (8 \cdot 5) \cdot 2 = 40 \cdot 2 = 80$ $(il\ doppio\ di\ prima)$.

Vale anche, per ogni prestazione lavorativa, l'uguaglianza $\boxed{\dfrac{euro}{ore} = 8}$

da cui, per esempio, l'altra uguaglianza $\boxed{\dfrac{euro_{\text{MARTEDI'}}}{ore_{\text{MARTEDI'}}} = \dfrac{euro_{\text{GIOVEDI'}}}{ore_{\text{GIOVEDI'}}} = 8}$

che può essere scritta pure come proporzione: $\boxed{euro_{\text{MARTEDI'}} : ore_{\text{MARTEDI'}} = euro_{\text{GIOVEDI'}} : ore_{\text{GIOVEDI'}}}$

Si dice che **due grandezze x, y in relazione fra loro** (nell'es.: le ore lavorate, gli euro guadagnati) sono **DIRETTAMENTE PROPORZIONALI (l'avverbio "direttamente" si può anche omettere)** quando **la legge che le lega è della forma**

$$\boxed{y = k \cdot x}$$

dove k è una costante che prende il nome di "**coefficiente di proporzionalità** (diretta)".

In questo caso vale l'uguaglianza

$$\boxed{\frac{y}{x} = k}$$ **(il loro RAPPORTO si mantiene COSTANTE!)**

da cui, per coppie di valori corrispondenti $(x_1, y_1);\ (x_2, y_2);\ (x_3, y_3); \ldots$

l'uguaglianza di rapporti $\dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{y_2}{x_2} = \dfrac{y_3}{x_3} = \ldots$

e quindi la possibilità di scrivere proporzioni come

$$\boxed{\mathbf{y_1 : x_1 = y_2 : x_2}} \quad ossia$$

$$\underset{\substack{un\ valore\\ di\ una\\ grandezza\\ \ldots}}{y_1} : \underset{\substack{\ldots sta\ al\\ valore\\ corrispondente\\ dell'altra\\ \ldots}}{x_1} = \underset{\substack{\ldots come\ un\\ altro\ valore\\ della\ prima\\ grandezza\\ \ldots}}{y_2} : \underset{\substack{\ldots sta\ al\\ valore\\ corrispondente\\ dell'altra}}{x_2}$$

$$OPPURE\ (permutando\ i\ medi)$$

$$\boxed{\mathbf{y_1 : y_2 = x_1 : x_2}} \quad ossia$$

$$\substack{rapporto\ \ fra\ due\ valori\\ di\ una\ grandezza} = \substack{rapporto\ \ fra\ i\ valori\ corrispondenti\\ dell'altra\ grandezza,\ presi\ NELLO\ STESSO\ ORDINE}$$

b) PROPORZIONALITA' INVERSA

"Se percorro quel tratto di strada a velocità doppia, ci metto metà del tempo".

Da casa mia al posto dove lavoro ci sono 2 km.
Detesto spostarmi in automobile:
vado invece a piedi, viaggiando, all'andata, a 6 km/h, e mettendoci dunque 1/3 di ora (20 minuti).
Il ritorno lo faccio poi di corsa, a velocità doppia: 12 km/h, e ci metto quindi 1/6 di ora (10 minuti).

- 2 km, a 6 km all'ora: 1/3 di ora
- 2 km, a 12 km all'ora: 1/6 di ora
- 2 km, a 18 km all'ora: 1/9 di ora (la corsa di un bravo podista)
- 2 km, a 24 km all'ora: 1/12 di ora (in bici)
- ecc.

Se *raddoppia* la velocità di percorrenza di una distanza fissata, il tempo *si riduce alla metà*;
se *triplica* la velocità di percorrenza della stessa distanza, il tempo *si riduce alla terza parte*;
... ecc.

Vale la formula

$\boxed{tempo = \dfrac{2}{velocità}}$ $\quad$ ($tempo$ in ore, $distanza\ fissa$ di 2 km, $velocità$ espressa in km all'ora)

da cui, ad esempio, se

$velocità = 8\ km/h$, si avrà $tempo = \dfrac{2\ km}{8\ km/h} = \dfrac{1}{4}h$ $\quad$ ($un\ quarto\ d'ora, 15\ minuti$);

$velocità = 16\ km/h$ ($il\ doppio\ di\ prima$), si avrà $tempo = \dfrac{2\ km}{16\ km/h} = \dfrac{1}{8}h$ $\quad$ ($7'\ e\ 30''$, $la\ metà\ di\ prima$).

Vale anche l'uguaglianza

$\boxed{tempo \cdot velocità = 2}$

da cui, per esempio, l'altra uguaglianza

$\boxed{tempo_{\text{CORSA}} \cdot velocità_{\text{CORSA}} = tempo_{\text{BICI}} \cdot velocità_{\text{BICI}} = 2}$

che, grazie alla proprietà fondamentale delle proporzioni applicata in senso inverso,
può essere scritta pure sotto forma di proporzione:

$\boxed{tempo_{\text{CORSA}} : tempo_{\text{BICI}} = velocità_{\text{BICI}} : velocità_{\text{CORSA}}}$

Si dice che **due grandezze x, y in relazione fra loro**
(nel nostro esempio: la velocità e il tempo di percorrenza di una distanza fissata)
sono **INVERSAMENTE PROPORZIONALI** quando **la legge che le lega è della forma**

$$\boxed{y = \frac{k}{x}}$$

dove k è una costante che prende il nome di "**coefficiente di proporzionalità inversa**".

In questo caso vale l'uguaglianza

$\boxed{x \cdot y = k}$ **(il loro PRODOTTO si mantiene COSTANTE!)**

da cui, per coppie di valori corrispondenti $(x_1, y_1);\ (x_2, y_2);\ (x_3, y_3); \ldots$

le uguaglianze di prodotti $x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = x_3 \cdot y_3 = \ldots$

e quindi la possibilità di scrivere proporzioni come

$\boxed{\mathbf{y_1 : y_2 = x_2 : x_1}}$ *ossia*

$$\begin{matrix} rapporto\ fra\ due\ valori \\ di\ una\ grandezza \end{matrix} = \begin{matrix} rapporto\ fra\ i\ valori\ corrispondenti \\ dell'altra\ grandezza,\ ma\ IN\ ORDINE\ SCAMBIATO \end{matrix}$$