

PROBLEMI IN PIU' INCOGNITE - SISTEMI DI EQUAZIONI

1. I SISTEMI DI EQUAZIONI E IL METODO DI "SOSTITUZIONE"

□ PROBLEMA SVOLTO 1

Trovare due numeri interi sapendo che:

- se si diminuisce il più grande di 4 unità e si aumenta di 3 unità il più piccolo, il prodotto dei due numeri diminuisce di 8 unità;
- se si divide la somma dei due numeri per la loro differenza si ottiene quoziente 6 e resto 2.

E' subito evidente la grande difficoltà a cui si andrebbe incontro se si cercasse di risolvere con una sola incognita.

Infatti, riflettiamo: qualunque numero fra i due decidessimo di indicare con x , come faremmo poi ad esprimere l'altro numero per mezzo di x ? Sarebbe un bel grattacapo!!!

Pertanto imposteremo questo problema con DUE INCOGNITE anziché con una sola.

Quando si risolve con più di una incognita (e ciò è opportuno specialmente quando non è facile esprimere tutte le quantità in gioco in funzione di una sola di esse) si scrivono tante equazioni quante sono le incognite poste e le si riunisce entro una "graffa di sistema", che equivale, dal punto di vista logico, a un connettivo "ET".

Risolvere un sistema significa determinare quei valori delle incognite in gioco che soddisfano **CONTEMPORANEAMENTE TUTTE** le equazioni da cui il sistema è formato.



RISOLUZIONE

$x =$ numero più grande
 $y =$ numero più piccolo

$$\begin{cases} (x-4)(y+3) = xy - 8 \\ 6(x-y) + 2 = x + y \end{cases}$$

NOTA $a:b$ dà 6 col resto di 2 quando $6b + 2 = a$ ($e \ 2 < b$)

Innanzitutto, svolgiamo i calcoli e portiamo il sistema in "FORMA NORMALE".

Ciò significa che, in ciascuna equazione, dovremo fare in modo di avere:

- a primo membro, un termine per ognuna delle incognite poste;
- a secondo membro, il termine noto.

$$\begin{cases} \cancel{xy} + 3x - 4y - 12 = \cancel{xy} - 8 \\ 6x - 6y + 2 = x + y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 4y = -8 + 12 \\ 6x - x - 6y - y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 4y = 4 \\ 5x - 7y = -2 \end{cases} \quad \text{FORMA NORMALE}$$

A questo punto, possiamo proseguire scegliendo a piacere fra:

- 1) il metodo di sostituzione (il più semplice e generale)
- 2) il metodo di riduzione (molto brillante e divertente)
- 3) il metodo di Cramer (basato sui "determinanti", completamente "meccanico"; pagg. 201 ... 203)
- 4) il metodo del confronto (applicabile solo con 2 equazioni e 2 incognite; vedi pag. 200)

Occupiamoci innanzitutto del metodo 1).

Il metodo di **SOSTITUZIONE** consiste nell'**isolare un'incognita da una delle due equazioni** per sostituire poi l'espressione così ottenuta nell'altra equazione, che in tal modo si troverà a contenere un'incognita sola.

$$\begin{cases} 3x - 4y = 4 \\ 5x - 7y = -2 \end{cases}$$

(*)

$$\begin{cases} 3x = 4y + 4; & x = \frac{4y + 4}{3} \quad (*) \\ 5 \cdot \frac{4y + 4}{3} - 7y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{4y + 4}{3} \\ \frac{20y + 20}{3} - 7y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{4y + 4}{3} \\ \frac{20y + 20 - 21y}{3} = \frac{-6}{3}; \quad -y = -26; \quad y = 26 \end{cases} \quad (**)$$

$$\begin{cases} y = 26 \\ x = \frac{4y + 4}{3} = \frac{4 \cdot 26 + 4}{3} = \frac{104 + 4}{3} = \frac{108}{3} = 36 \\ x = 36 \\ y = 26 \end{cases}$$

VERIFICA sul sistema (**):

$$\begin{cases} (36 - 4)(26 + 3) = 36 \cdot 26 - 8 \\ 6(36 - 26) + 2 = 36 + 26 \\ 32 \cdot 29 = 936 - 8 \\ 6 \cdot 10 + 2 = 62 \\ 928 = 928 \quad OK!!! \\ 62 = 62 \end{cases}$$

La VERIFICA direttamente sul *problema* (che poi è la più completa e “sicura”), è lasciata al lettore.

♥ Teoricamente si può isolare un'incognita qualsiasi da un'equazione qualsiasi, ma nella pratica converrà, per comodità di calcolo, privilegiare l'equazione più semplice e soprattutto il termine col coefficiente più semplice, perché questo coefficiente è poi destinato a passare a denominatore! ... E avere un denominatore piccolo è vantaggioso quando poi lo si manda via.

♥ La VERIFICA, in un sistema, si effettua sostituendo, nel sistema iniziale, al posto delle singole incognite, i valori rispettivamente trovati.

TUTTE le equazioni devono trasformarsi in uguaglianze vere, altrimenti c'è qualcosa che non va.

Vuoi un **CONSIGLIO DA AMICO? DAVVERO UTILISSIMO?**

Falla sempre, questa verifica, alla fine della risoluzione!

In questo modo sarai davvero sicuro di aver fatto giusto, oppure scoprirai inequivocabilmente che c'è un errore!!!



□ PROBLEMA SVOLTO 2

Anna dice al fratello Bruno:

“Il numero dei miei fratelli è uguale al doppio del numero delle mie sorelle”.

E Bruno replica:

“Io, invece, ho tanti fratelli quante sorelle”.

Quanti figli maschi e quante figlie femmine ci sono in famiglia?

NOTA

Il sistema ottenuto è molto elementare, e con un'equazione già nella forma $y = \dots$

In casi simili, si potrebbe anche evitare di portare in forma normale; tuttavia, l'abbiamo fatto ugualmente “per buona abitudine”, dato che nella maggioranza dei casi è utilissimo, anche in vista di altri metodi di risoluzione (riduzione, Cramer).

$$\begin{cases} y = 2(x - 1) \\ y - 1 = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x - 2 \\ -x + y = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} -2x + y = -2 \\ -x + y = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = x + 1 \\ -2x + x + 1 = -2; \quad -x = -3; \quad x = 3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = x + 1 = 3 + 1 = 4 \end{cases}$$

VERIFICA, direttamente sul problema

3 femmine e 4 maschi: $\begin{matrix} F & F & F & M & M & M & M \\ & & & \text{ANNA} & & & \text{BRUNO} \end{matrix}$

Giusto: Anna può dire che il numero dei suoi fratelli è due volte quello delle sue sorelle ...
... e Bruno ha ragione quando afferma di avere tanti fratelli quante sorelle.