9. DETERMINANTI

Si dice "determinante" uno schema, contenente quattro numeri a, b, c, d, della forma $\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{vmatrix}$;

lo schema ha il compito di indicare che sui 4 numeri in gioco va effettuata l'operazione $\mathbf{ad - bc}$.

E' dunque $\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{vmatrix} = \mathbf{ad - bc}$.

❑ $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = 5\cdot 10 - 4\cdot 3 = 50 - 12 = 38$

❑ $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -3 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{5} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right) - (-3)\cdot\frac{1}{4} = -\frac{1}{10} + \frac{3}{4} = \frac{-2+15}{20} = \frac{13}{20}$

In questo modo noi abbiamo dato la definizione di determinante, **nel caso in cui i numeri coinvolti nello schema siano 4, disposti su 2 righe e 2 colonne (determinante "del 2° ordine"**).
Ma è possibile anche considerare determinanti del 3° ordine (3 righe e 3 colonne; 9 termini), del 4° ordine (4 righe e 4 colonne; 16 termini), e così via.

Un determinante del 3° ordine si sviluppa come segue:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}\cdot\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,2}\cdot\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3}\cdot\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$$

In generale, **lo sviluppo di un determinante di ordine n viene sempre ricondotto a determinanti dell'ordine inferiore n–1.**
Ad esempio, per il 4° ordine, è:

Abbiamo qui scelto una simbologia, molto utilizzata in matematica, secondo la quale ciascun elemento del determinante si può indicare con una lettera munita di **due indici, il primo dei quali corrisponde alla riga e il secondo alla colonna,** su cui l'elemento è posizionato.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} = a_{1,1}\cdot\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} - a_{1,2}\cdot\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} + a_{1,3}\cdot\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,4} \end{vmatrix} - a_{1,4}\cdot\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} \end{vmatrix}$$

Tutto ciò potrebbe apparire terrificante, ma in realtà corrisponde alla non difficilissima **REGOLA**:

Per **sviluppare un determinante di ordine n**, si sceglie una **linea** (riga o colonna) **qualsiasi** (qui sopra è stata sempre scelta la prima riga) e si prende ciascun termine della linea

- col proprio segno se la somma dei suoi due indici è pari,
- con segno cambiato se la somma dei due indici è dispari;

poi si moltiplica il termine in esame (col segno opportuno) per il determinante di ordine $n-1$ ottenibile cancellando la riga e la colonna su cui sta il termine in questione.
I prodotti così ottenuti vengono sommati algebricamente.
Si dimostra che **il risultato è indipendente dalla linea scelta**.

Ad esempio, sviluppiamo un determinante del 3° ordine secondo la sua prima riga, poi secondo la sua seconda colonna:

In modo equivalente, si sarebbe potuto scrivere che il calcolo di un determinante consiste nel sommare algebricamente i prodotti dei termini di una linea per i rispettivi "*complementi algebrici*", dove il "complemento algebrico" di un termine $a_{i,k}$ è il numero $\mathrm{A}_{i,k}$ ottenibile prendendo il determinante che rimane se si cancellano la riga e la colonna su cui sta il termine in questione, e moltiplicandone il valore per $+1$ o -1 a seconda che $i+k$ sia pari o sia dispari.

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -8 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 7\cdot\begin{vmatrix} 1 & -8 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & -8 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 5\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 7(-3-0) - 2\cdot(-12-8) + 5\cdot(0+1) = -21+40+5 = 24$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -8 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -2\cdot\begin{vmatrix} 4 & -8 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = -2(-12-8) + 1\cdot(-21+5) - 0 = +40-16 = 24$$

ESERCIZI Calcola i seguenti determinanti.

1) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -6 & 7 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} -15 & 1 \\ -14 & 0 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} x+y & z \\ z & x-y \end{vmatrix}$

Sviluppa i determinanti 6) e 7) secondo:

6) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix}$ **7)** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

a) la prima riga b) la prima colonna
c) la seconda riga d) la seconda colonna
per verificare che il risultato non cambia.

8) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

9) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

RISULTATI 1) –8 2) 58 3) 14 4) 0 5) $x^2-y^2-z^2$ 6) 17 7) 0 8) –16 9) 1