10. RISOLUZIONE DEI SISTEMI DI 1° GRADO COL METODO DI CRAMER

Consideriamo il sistema (che è poi il generico sistema composto da due equazioni di 1° grado):

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

e proponiamoci di ricavare *x* col metodo di riduzione. Avremo:

$$\begin{matrix} b' \cdot \\ b \cdot \end{matrix} \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab'x + bb'y = b'c \\ a'bx + bb'y = bc' \end{cases}$$

$$(1) - (2) \quad (ab' - a'b)x = b'c - bc'$$

$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b} \quad (se\ \ ab' - a'b \neq 0)$$

Si può notare ora che numeratore e denominatore possono essere scritti in forma di determinanti:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

… e quest'ultima forma ha il pregio di essere **davvero facile da ricordare**! Infatti:

- ♪ a denominatore abbiamo il determinante costruito prendendo, nel sistema dato, i coeff. delle incognite
- ♫ mentre a numeratore abbiamo lo stesso determinante, nel quale però la colonna relativa ai coeff. di *x* (l'incognita che si sta calcolando) è stata sostituita dalla colonna dei termini noti.

Se operiamo in modo analogo per ricavare *y*, otterremo

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

Anche qui, analogamente al caso della *x*,

- ♪ a denominatore ci ritroviamo il determinante dei coefficienti delle incognite
- ♫ e a numeratore abbiamo lo stesso determinante, nel quale però la colonna relativa ai coefficienti di *y* (l'incognita che si sta calcolando) è stata sostituita dalla colonna dei termini noti.

Ricapitolazione.

Un sistema di due equazioni di 1° grado in due incognite: $\boxed{\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}}$

può, volendo, essere risolto ("metodo di Cramer") per mezzo delle due formule $\boxed{\begin{matrix} x = \dfrac{\mathbf{D}_{x}}{\mathbf{D}} \\ y = \dfrac{\mathbf{D}_{y}}{\mathbf{D}} \end{matrix}}$,

dove:

$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ = determinante dei coefficienti delle incognite

$\mathbf{D}_{x} = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$

$\mathbf{D}_{y} = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$

$\mathbf{D}_{x}$, $\mathbf{D}_{y}$ (in queste scritture, lette "Di *x*", "Di *y*", *x* e *y* hanno il ruolo di *indici*) **sono i determinanti ottenibili a partire dal determinante D, sostituendo, al posto della colonna dei coefficienti dell'incognita che si vuole in quel momento ricavare, la colonna dei termini noti.**

OSSERVAZIONE Per completezza, occorre puntualizzare che le formule di Cramer valgono a condizione che sia $D \neq 0$. Nel caso risulti $D = 0$ il sistema è, a seconda dei casi, *impossibile* o *indeterminato* (pagg. 400, 401).

❑ Esempio di applicazione

$$\begin{cases}3x-y=4\\x+5y=-2\end{cases}\qquad x=\frac{D_x}{D}=\frac{\begin{vmatrix}4&-1\\-2&5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3&-1\\1&5\end{vmatrix}}=\frac{20-2}{15+1}=\frac{18}{16}=\frac{9}{8}\qquad y=\frac{D_y}{D}=\frac{\begin{vmatrix}3&4\\1&-2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3&-1\\1&5\end{vmatrix}}=\frac{-6-4}{15+1}=\frac{-10}{16}=-\frac{5}{8}$$

Si può dimostrare poi che il "metodo di Cramer" *(Gabriel Cramer, 1704-1752)* **vale anche per i sistemi lineari di 3 equazioni in 3 incognite, di 4 equazioni in 4 incognite, ecc. (in generale: di *n* equazioni in *n* incognite).**

♥ OSSERVAZIONE TERMINOLOGICA

L'aggettivo "**LINEARE**", in Algebra, significa "**DI 1° GRADO**".

Un'equazione è di 1° grado quando è riconducibile a un'uguaglianza fra due polinomi di 1° grado, oppure ad un polinomio di 1° grado, uguagliato a 0.

Un sistema di equazioni è di 1° grado quando tutte le equazioni che lo compongono sono di 1° grado.

Ad es., nel caso $n=3$, abbiamo: $\begin{cases}\boldsymbol{ax+by+cz=d}\\\boldsymbol{a'x+b'y+c'z=d'}\\\boldsymbol{a''x+b''y+c''z=d''}\end{cases}$. Bene, sarà $\boldsymbol{x=\frac{D_x}{D};\ y=\frac{D_y}{D};\ z=\frac{D_z}{D}}$,

dove: $D=\begin{vmatrix}a&b&c\\a'&b'&c'\\a''&b''&c''\end{vmatrix};\quad D_x=\begin{vmatrix}d&b&c\\d'&b'&c'\\d''&b''&c''\end{vmatrix};\quad D_y=\begin{vmatrix}a&d&c\\a'&d'&c'\\a''&d''&c''\end{vmatrix};\quad D_z=\begin{vmatrix}a&b&d\\a'&b'&d'\\a''&b''&d''\end{vmatrix}$

D è il determinante dei coefficienti delle incognite
mentre D_x, D_y, D_z sono i determinanti ottenibili a partire dal determinante D, sostituendo, al posto della colonna dei coefficienti dell'incognita che si vuole ricavare, la colonna dei termini noti.

❑ Esempio:

$$\begin{cases}x+y=4\\2x-z=0\\3x-y-4z=0\end{cases}\quad \text{INCOLONNO, innanzitutto!}\quad \begin{cases}x\ +y\ \ \ \ \ \ \ \ =4\\2x\ \ \ \ \ \ \ -z\ =0\\3x\ -y\ -4z=0\end{cases}$$

Incolonnare è molto importante, per poter poi scrivere senza errori i vari determinanti

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{\begin{vmatrix}4&1&0\\0&0&-1\\0&-1&-4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&0\\2&0&-1\\3&-1&-4\end{vmatrix}}=\frac{4\cdot\begin{vmatrix}0&-1\\-1&-4\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}0&-1\\0&-4\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}0&0\\0&-1\end{vmatrix}}{1\cdot\begin{vmatrix}0&-1\\-1&-4\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}2&-1\\3&-4\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}2&0\\3&-1\end{vmatrix}}=\frac{4\cdot(-1)-1\cdot0+0}{1\cdot(-1)-1\cdot(-5)+0}=\frac{-4}{-1+5}=\frac{-4}{4}=-1$$

Per esercizio, puoi calcolare tu stesso i valori di *y* e di *z*.
Alla fine, verifica la correttezza dei risultati sostituendo nelle tre equazioni del sistema iniziale.

ESERCIZI (METODO DI CRAMER)

1) $\begin{cases}x+2y=3\\4x+5y=6\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x-y=-1\\2x+y=4\end{cases}$ 5) $\begin{cases}x\ \ \ \ \ \ \ +z=1\\2x-y+2z=1\\\ \ \ \ 5y+4z=7\end{cases}$ 6) $\begin{cases}x+y+z=0\\x=y-1\\3z-2x=5\end{cases}$ 7) $\begin{cases}x+y+z+t=1\\y-z-t=2\\x+2z=1\\2y-t=3\end{cases}$

3) $\begin{cases}3x-2y=10\\2x+3y=-2\end{cases}$ 4) $\begin{cases}a+b-1=0\\b-3a+1=0\end{cases}$

Evidentemente, puoi, volendo, rifare con Cramer anche qualunque altro esercizio fra i tanti proposti.

8) ♥ Il metodo di Cramer, puramente "automatico", è il più adatto ad essere utilizzato su di un computer, o comunque quando i coefficienti sono numeri con tante cifre. L'esercizio qui a fianco va svolto con l'aiuto di una calcolatrice o di un foglio elettronico; alla fine, fai la verifica.

$$\begin{cases}35{,}58x-57{,}73y=23{,}09\\10{,}78x+25{,}43y=-2{,}37\end{cases}$$

SOLUZIONI

1) $\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x=2\\y=-2\end{cases}$ 4) $\begin{cases}a=1/2\\b=1/2\end{cases}$ 5) $\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$ 6) $(-1, 0, 1)$ 7) $(x=1,\ y=1,\ z=0,\ t=-1)$