SCOMPOSIZIONE IN FATTORI (= FATTORIZZAZIONE) DI UN POLINOMIO

Scomporre in fattori
(= fattorizzare)
un polinomio
significa trasformarlo,
se possibile:

a) nel prodotto di due polinomi,

b) oppure nel prodotto di un monomio per un polinomio,

c) oppure ancora nella potenza di un polinomio.

Studieremo in questo capitolo le principali tecniche di fattorizzazione, a cominciare dalle più semplici.

Dal mirabile "**Teorema Fondamentale dell'Algebra**" (Volume 2) si trae fra l'altro, come conseguenza, che QUALSIASI polinomio a una sola variabile ammette SEMPRE una scomposizione in fattori di 1° o di 2° grado. D'altra parte, è stato pure dimostrato che non esiste nessun algoritmo di carattere generale capace di fattorizzare un polinomio arbitrario, nemmeno se ci si limita ad una sola lettera, per cui poi, nella pratica, la fattorizzazione viene effettuata solo su polinomi particolarmente "docili".

Negli esercizi di base per l'apprendimento, vengono proposti di solito polinomi a coefficienti interi, intendendo che pure la scomposizione venga realizzata utilizzando esclusivamente coefficienti interi (se poi nel polinomio di partenza compaiono coefficienti frazionari, ammetteremo che possano entrare coefficienti frazionari anche nella scomposizione; escluderemo comunque, almeno in questa prima fase, l'impiego di coefficienti irrazionali).

In My Humble Opinion

Se sei un insegnante e stai utilizzando questo testo coi tuoi allievi, mi permetto di invitarti a … non dedicare UN TEMPO ECCESSIVO alla fattorizzazione.
E' vero che questo argomento contribuisce a sviluppare la "sensibilità algebrica" dello studente; d'altra parte, si tratta di esercizi abbastanza "meccanici" e in una certa misura artificiosi, ed è forse allora preferibile ridurne un poco il "peso", dando più spazio ad altre attività atte a valorizzare il ragionamento, le capacità di analisi e di *problem solving*, l'immaginazione.

1. RICONOSCIMENTO DI PRODOTTI NOTEVOLI

Se il polinomio che si vuole fattorizzare è il risultato dello svolgimento di un prodotto notevole, la scomposizione consisterà semplicemente nel risalire al prodotto notevole di partenza.

a) x^2-6x+9. Riconosciamo facilmente che si tratta del quadrato di un binomio. Dunque:
$x^2-6x+9=(x-3)^2$ oppure, in alternativa, $x^2-6x+9=(-x+3)^2=(3-x)^2$

b) $\frac{1}{16}a^4+\frac{1}{10}a^3+\frac{1}{25}a^2$

Dal fatto che ci siano 3 termini, due dei quali (il 1° e il 3°) sono quadrati di monomi, si è portati a pensare che si abbia anche qui il quadrato di un binomio. Proviamo a scrivere allora

$$\frac{1}{16}a^4+\frac{1}{10}a^3+\frac{1}{25}a^2=\left(\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{5}a\right)^2$$

ma ci converrà *controllare* attentamente, svolgendo il prodotto notevole, se si ottiene davvero il polinomio di partenza.
In effetti, vediamo che è proprio così.
Dunque la scomposizione da noi ipotizzata è OK.

Osserviamo che anche in questo caso ci sarebbe stata un'altra possibilità: $\left(-\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{5}a\right)^2$.

Fra le due alternative, di norma si sceglie la più semplice ed elegante, ossia la prima.

♥ **SUGGERIMENTO DA AMICO!**

Dopo che hai effettuato una scomposizione, il modo più sicuro ed efficace per verificare se è corretta consiste nel RIFARE IL CALCOLO A RITROSO, allo scopo di controllare se effettivamente, rimoltiplicando, o svolgendo la potenza, si riottiene il polinomio iniziale.

CALDAMENTE RACCOMANDATO, specie a chi è – pardòn – "alle prime armi". Utile anche per capire bene i meccanismi algebrici e mentali della fattorizzazione!

c) $9x^2-6xy+y^2-24x+8y+16$

Qui abbiamo 6 termini, di cui tre ($9x^2,\ y^2,\ 16$) sono quadrati di monomi. Potrebbe perciò trattarsi del quadrato di un trinomio; se così fosse, i termini sarebbero, a parte i segni che per ora lasciamo in sospeso, $3x,\ y,\ 4$. Prepariamoci dunque lo schema $(3x\quad y\quad 4)^2$ dopodiché decideremo i segni in modo che, svolgendo il quadrato, ci venga restituito (almeno, speriamo!) il polinomio di partenza.
Ipotizziamo che sia : $9x^2-6xy+y^2-24x+8y+16=(3x-y-4)^2$
e, svolgendo il prodotto notevole, vediamo che in effetti si riottiene esattamente il polinomio dato.
Dunque la scomposizione è confermata. Anche, in alternativa: $9x^2-6xy+y^2-24x+8y+16=(-3x+y+4)^2$

♥ **Ogniqualvolta la scomposizione porta ad un quadrato, c'è sempre una seconda "soluzione", nella quale tutti i termini del polinomio che è base del quadrato vengono cambiati di segno. In effetti, due numeri opposti hanno sempre lo stesso quadrato!**
Ad esempio, il numero 49 *è il quadrato di* 7*, ma è anche il quadrato di* -7

d) $x^2-25=(x+5)(x-5)$

♥ Una **differenza di quadrati** si scompone facendo **la somma delle basi moltiplicato la loro differenza:**

♥ **FORMULA IMPORTANTISSIMA!!!**
$\boxed{\mathbf{a^2-b^2=(a+b)(a-b)}}$

e) $\frac{9}{4}a^{12}-49b^8c^6=\left(\frac{3}{2}a^6+7b^4c^3\right)\left(\frac{3}{2}a^6-7b^4c^3\right)$

f) $y^4-16=\underbrace{(y^2+4)}_{\substack{\text{SOMMA}\\ \text{di quadrati:}\\ \text{NON}\\ \text{scomponibile!}}}\underbrace{(y^2-4)}_{\substack{\text{DIFF.}\\ \text{di quadrati,}\\ \text{scomponibile}}}=(y^2+4)(y+2)(y-2)$

g) $x^3-6x^2+12x-8=(x-2)^3$

h) $a^8-4a^6+6a^4-4a^2+1=(a^2-1)^4=[(a+1)(a-1)]^4=(a+1)^4(a-1)^4$

♥ Intenderemo che ogni esercizio di scomposizione debba essere portato a termine *completamente*: dunque **dovrai sempre domandarti se i fattori ottenuti siano a loro volta scomponibili e, in caso affermativo, fattorizzare anche questi**

ESERCIZI (riconoscimento di prodotti notevoli)

1) $x^2-8x+16$
2) $9a^2+12ab+4b^2$
3) t^4+1+2t^2
4) $a^2b^2-14abc+49c^2$
5) $9r^2-6r+1$
6) $25+36y^6+60y^3$
7) x^2-9
8) $16t^4-1$
9) $49a^2-36b^2$
10) $1-t^8$
11) $8x^3+60x^2+150x+125$
12) $a^{15}-6a^{10}+12a^5-8$
13) t^3+1+3t^2+3t
14) $27a^3-27a^2xy+9ax^2y^2-x^3y^3$
15) $y^4-8y^3+24y^2-32y+16$
16) $a^8+4a^6+6a^4+4a^2+1$
17) $1+5b+10b^2+10b^3+5b^4+b^5$
18) $4a^2+9b^2+1-12ab-4a+6b$
19) $t^2x^2-2tx^2+x^2+4tx-4x+4$
20) $9a^6-12a^4-6a^3+4a^2+4a+1$
21) a^4-2a^2+1
22) $\frac{1}{4}y^2+y+1$
23) $\frac{1}{4}y^2-1$
24) $\frac{4}{9}a^2+\frac{9}{4}b^2-2ab$
25) $1-c+\frac{1}{3}c^2-\frac{1}{27}c^3$
26) $s^4+\frac{1}{4}p^2+\frac{1}{9}+s^2p-\frac{2}{3}s^2-\frac{1}{3}p$
27) $a^{12}+3a^8+3a^4+1$
28) $a^{12}-3a^8+3a^4-1$
29) $a^{2k}+6a^k+9$
30) $y^{2a+2}-1$

RISULTATI

1) $(x-4)^2$ o anche $(4-x)^2$
2) $(3a+2b)^2$ o anche $(-3a-2b)^2$
3) $(t^2+1)^2$
4) $(ab-7c)^2$
5) $(3r-1)^2$
6) $(5+6y^3)^2=(6y^3+5)^2$
7) $(x+3)(x-3)$
8) $(4t^2+1)(2t+1)(2t-1)$
9) $(7a+6b)(7a-6b)$
10) $(1+t^4)(1+t^2)(1+t)(1-t)$
11) $(2x+5)^3$
12) $(a^5-2)^3$
13) $(t+1)^3$
14) $(3a-xy)^3$
15) $(y-2)^4$ oppure $(-y+2)^4$
16) $(a^2+1)^4$ oppure $(-a^2-1)^4$
17) $(1+b)^5$
18) $(2a-3b-1)^2=(-2a+3b+1)^2$
19) $(tx-x+2)^2$
20) $(3a^3-2a-1)^2$
21) $(a+1)^2(a-1)^2$
22) $\left(\frac{1}{2}y+1\right)^2$
23) $\left(\frac{1}{2}y+1\right)\left(\frac{1}{2}y-1\right)$
24) $\left(\frac{2}{3}a-\frac{3}{2}b\right)^2$
25) $\left(1-\frac{1}{3}c\right)^3$
26) $\left(s^2+\frac{1}{2}p-\frac{1}{3}\right)^2$
27) $(a^4+1)^3$
28) $(a^2+1)^3(a+1)^3(a-1)^3$
29) $(a^k+3)^2$
30) $(y^{a+1}+1)(y^{a+1}-1)$