3. SCOMPOSIZIONE DI UN POLINOMIO PER RACCOGLIMENTI PARZIALI

Consideriamo il polinomio

$$ax+ay+bx+by$$

Non si tratta di un prodotto notevole svolto, e non c'è alcun fattore che sia comune a tutti i termini.
Tuttavia, se prendiamo i primi due termini soltanto, vediamo che essi hanno in comune il fattore a;
raccogliendolo, si otterrebbe $a(x+y)$;
allo stesso modo, gli ultimi due termini hanno in comune il fattore b,
e, raccogliendolo, si otterrebbe $b(x+y)$;
quindi così facendo, in entrambe le scomposizioni parziali, comparirebbe uno stesso fattore:
il binomio $(x+y)$!
Dunque

$$\underbrace{ax+ay}+\underbrace{bx+by}=a(x+y)+b(x+y)=(x+y)(a+b)$$

L'ultimo passaggio è consistito nel raccogliere, fra i due "pezzi" $a(x+y)$ e $+b(x+y)$, il binomio $(x+y)$.
In pratica, il "blocco" $(x+y)$ è stato "trattato" come un numero unico.

Si dice che la scomposizione $ax+ay+bx+by=a(x+y)+b(x+y)=(x+y)(a+b)$ è stata eseguita "per **raccoglimenti parziali**".

Per convincerci della validità del procedimento, possiamo:

- svolgere il prodotto ottenuto $(x+y)(a+b)$
  e constatare che, in effetti, si riottiene proprio il polinomio di partenza
- pensare di sostituire, per un istante, il blocco $(x+y)$ con una singola lettera: poniamo ad esempio
  $x+y=z$ e avremo $ax+ay+bx+by=a(x+y)+b(x+y)=az+bz=z(a+b)=(x+y)(a+b)$

La scomposizione avrebbe potuto essere effettuata anche abbinando i termini in modo diverso:

$$\underline{ax}+\underset{\bullet}{ay}+\underline{bx}+\underset{\bullet}{by}=x(a+b)+y(a+b)=(a+b)(x+y)$$

Di fronte a un esercizio di scomposizione per raccoglimenti parziali,
è SEMPRE possibile abbinare i termini in due modi differenti.
Non staremo ad evidenziare tutte le volte questo fatto, che, ripeto, è normale si verifichi SEMPRE.

Ecco qui di seguito altri esempi di scomposizione per raccoglimenti parziali.

Una scomposizione per raccoglimenti parziali richiede di procedere per tentativi:
si tratta di **suddividere il polinomio dato in più "pezzi" tali che,**
raccogliendo in ciascun "pezzo" un opportuno fattore,
♥ **si riesca a FAR COMPARIRE FRA PARENTESI SEMPRE LO STESSO POLINOMIO.**
Dopo questa prima fase di raccoglimenti "**parziali**", si effettuerà il raccoglimento "**totale**"
del polinomio che è stato fatto comparire, come fattore, in ciascun "pezzo".

a) $\underbrace{3a^2+3ax}\underbrace{+2a+2x}=3a(a+x)+2(a+x)=(a+x)(3a+2)$

b) $\underbrace{2ab-6a}\ \underbrace{-7b+21}_{\substack{\text{raccogliamo}\\ \text{il fattore}\\ \text{NEGATIVO}\\ -7}}=2a(b-3)-7(b-3)=(b-3)(2a-7)$

Qui è stato necessario raccogliere, fra gli ultimi due termini, un fattore NEGATIVO (-7)

c) $ax+4x-ay-4y=x(a+4)-y(a+4)=(a+4)(x-y)$

d) $6ax+2bx+3a+b=2x(3a+b)+1\cdot(3a+b)=(3a+b)(2x+1)$

♥ **Qui sopra abbiamo dovuto, fra gli ultimi due termini, raccogliere il fattore "banale"** $+1$.
Di norma, in casi come questo,
si apre semplicemente una parentesi, sottintendendo il moltiplicatore 1.
Ci si accontenta cioè di raggruppare tra parentesi i termini in gioco, scrivendo soltanto

$$6ax+2bx+3a+b=2x(3a+b)+(3a+b)=(3a+b)(2x+1)$$

e) $3ab+15a-b-5=3a(b+5)-1\cdot(b+5)=(b+5)(3a-1)$

♥ **Qui abbiamo dovuto, fra gli ultimi due termini, raccogliere il fattore -1.**
Di norma, in casi come questo, ci si limita a "METTERE IN EVIDENZA IL SEGNO $-$".
Vale a dire, **si scrive il segno "$-$" seguito da una parentesi nella quale finirà il polinomio con tutti i segni cambiati**.

$$3ab+15a-b-5=3a(b+5)\underbrace{-(b+5)}_{\text{si è "messo in evidenza il segno }-\text{"}}=(b+5)(3a-1)$$

Riflettiamo: un segno "$-$" davanti equivale sempre a "$-1\,\bullet$" (moltiplicazione per -1).
Infatti,
un segno "$-$" davanti a un numero ne indica l'opposto, cioè indica che quel numero va cambiato di segno; e una moltiplicazione per -1 porta esattamente allo stesso effetto!
$-(b+5)=-1\cdot(b+5)$

f) $t^3-t^2-t+1=t^2(t-1)-(t-1)=(t-1)(t^2-1)=(t-1)(t+1)(t-1)=(t-1)^2(t+1)$

g) $xy^2-4xy+4x-3y^2+12y-12=x(y^2-4y+4)-3(y^2-4y+4)=(y^2-4y+4)(x-3)=(y-2)^2(x-3)$

oppure, abbinando i termini diversamente,

$\underline{xy^2}\underset{*}{-4xy}\underset{\bullet}{+4x}\underline{-3y^2}\underset{*}{+12y}\underset{\bullet}{-12}=y^2(x-3)-4y(x-3)+4(x-3)=(x-3)(y^2-4y+4)=(x-3)(y-2)^2$

h) $a^{15}+a^{13}+a^{11}+a^9=a^9(a^6+a^4+a^2+1)=a^9\left[a^4(a^2+1)+(a^2+1)\right]=a^9(a^2+1)(a^4+1)$

ESERCIZI (scomposizione per raccoglimenti parziali)

1) $ac+bc+3a+3b$
2) $6xy+5x-12y-10$
3) $a^2c+a^2d-b^2c-b^2d$
4) $3a^3+18a^2+4a+24$
5) $ax+ay-x-y$
6) $ax+ay+x+y$
7) $a^2+ab+ac+bc$
8) $xy-y^2-xz+yz$
9) $abcd-ab-cd+1$
10) t^3+2t^2-t-2
11) a^3+a^2+a+1
12) $14ax-6bx-7ay+3by$
13) $6ab+6cd-9ac-4bd$
14) $x^4+x^3-x^2-x$
15) $ax+4x-ay-4y$
16) $xy-x-y+1$
17) $ab+1+a+b$
18) $4a^3-8a^2-9a+18$
19) t^3-6t^2+t-6
20) $x^3y^3+x^2y^2+x^4y+xy^4$
21) $12ac^2-6ac-4c+2$
22) $a^{x+y}-3a^x-2a^y+6$
23) $e^{3t}-e^{2t}+e^t-1$
24) $x^{2a+b+c}+x^{a+b}+x^{a+c}+1$
25) $ax-ay+at+bx-by+bt$
26) $3a^2+3ac-3a^2c-4ab-4bc+4abc$
27) $ax-bx-ay+by-a+b$
28) $ax-2bx-2ay+4by+3az-6bz$
29) $18xw-15yw-12tx+10ty+20y-24x$
30) $b^{2x+y}-2b^{x+y}+b^y-b^{2x}+2b^x-1$
31) $ax+bx-x-ay-by+y-a-b+1$
32) $a^3+b^3+c^3-ab^2-a^2b-ac^2-a^2c+bc^2+b^2c$
33) $a^2-ab-ac+b+c-1=a^2-ab-ac+a-a+b+c-1=\ldots$

RISULTATI

1) $(a+b)(c+3)$
2) $(6y+5)(x-2)$
3) $(c+d)(a+b)(a-b)$
4) $(a+6)(3a^2+4)$
5) $(x+y)(a-1)$
6) $(x+y)(a+1)$
7) $(a+b)(a+c)$
8) $(x-y)(y-z)$
9) $(ab-1)(cd-1)$
10) $(t+2)(t+1)(t-1)$
11) $(a+1)(a^2+1)$
12) $(7a-3b)(2x-y)$
13) $(3a-2d)(2b-3c)$
14) $x(x+1)^2(x-1)$
15) $(a+4)(x-y)$
16) $(y-1)(x-1)$
17) $(b+1)(a+1)$
18) $(a-2)(2a+3)(2a-3)$
19) $(t-6)(t^2+1)$
20) $xy(x^2+y)(y^2+x)$
21) $2(2c-1)(3ac-1)$
22) $(a^y-3)(a^x-2)$
23) $(e^t-1)(e^{2t}+1)$
24) $(x^{a+c}+1)(x^{a+b}+1)$
25) $(x-y+t)(a+b)$
26) $(a+c-ac)(3a-4b)$
27) $(a-b)(x-y-1)$
28) $(a-2b)(x-2y+3z)$
29) $(6x-5y)(3w-2t-4)$
30) $(b^y-1)(b^x-1)^2$
31) $(a+b-1)(x-y-1)$
32) $(a-b-c)(a^2-b^2-c^2)$
33) $(a-b-c+1)(a-1)$

SUGGERIMENTO DA AMICO

Il PRIMO raccoglimento, negli esercizi, conviene effettuarlo con **coefficiente POSITIVO**