7. SCOMPOSIZIONE IN FATTORI COL METODO DI RUFFINI

Ricordiamo innanzitutto il **TEOREMA DEL RESTO** (pag. 116), che dice:

"il resto della divisione $P(x):(x-k)$ è uguale a $P(k)$, cioè al numero che si ottiene sostituendo il numero *k* al posto di *x* nel polinomio dividendo, e svolgendo i calcoli"

Indicato quindi con $Q(x)$ il quoziente della divisione $P(x):(x-k)$, varrà l'identità:

$$\boxed{\mathbf{P(x)=}}\ Q(x)\cdot(x-k)+R=\boxed{\mathbf{Q(x)\cdot(x-k)+P(k)}}$$

A questo punto un occhio attento può cogliere un fatto apparentemente banale,
ma che in realtà porta con sé delle conseguenze molto importanti:
nel caso risulti $P(k)=0$, l'identità diventa semplicemente $P(x)=Q(x)\cdot(x-k)$.

Mumble, mumble … ma allora … con questa osservazione abbiamo scoperto che, nel caso in cui risulti $P(k)=0$, il polinomio $P(x)$ è scomponibile in fattori!
E precisamente, la sua scomposizione è il prodotto $Q(x)\cdot(x-k)$,
essendo $Q(x)$ il quoziente della divisione $P(x):(x-k)$!!!

**Pertanto, se abbiamo un polinomio $P(x)$ da scomporre in fattori,
e non siamo riusciti nel nostro intento con nessuna delle tecniche precedentemente apprese,
potremmo fare un ultimo tentativo per la scomposizione:**
**♥ se riusciamo a trovare un numero k tale che $P(k)=0$,
ossia un numero *k* che sostituito al posto della variabile *x* renda il valore di $P(x)$ uguale a zero,
allora il polinomio $P(x)$ sarà scomponibile, e precisamente sarà scomponibile
nel prodotto $Q(x)\cdot(x-k)$, essendo $Q(x)$ il quoziente della divisione $P(x):(x-k)$.**

Ad esempio, sia da scomporre il polinomio $P(x)=3x^3+5x^2-16x-12$.
Si può constatare che questo polinomio **resiste a tutti i tentativi di scomposizione** con i "vecchi" metodi.
L' "ultima spiaggia" per tentare di scomporlo starà dunque nel cercare un numero *k* tale che P(*k*)=0: in breve, nel cercare uno "zero" del polinomio.

Negli esercizi proposti sui manuali scolastici il polinomio P(*x*) ha quasi sempre coefficienti interi, e anche la ricerca di *k* si limita, per semplicità, al solo campo dei numeri interi, o, al più, dei numeri razionali.

In tal caso (ripetiamo: **polinomio P(*x*) a coefficienti interi; ricerca del "*k*" nel solo ambito dei razionali) si può dimostrare che lo "zero" *k*, ammesso che esista, si deve trovare necessariamente fra quei numeri frazionari (o, in particolare, interi), che hanno**

♪ **a numeratore, un divisore del termine noto del polinomio P(*x*)**
♫ **e a denominatore, un divisore del 1° coefficiente di P(*x*)**

Via dunque con gli **ESEMPI**.

a) Vediamo come fare nel caso del polinomio inizialmente considerato $P(x)=3x^3+5x^2-16x-12$

- I **divisori del T. N.** sono i numeri $\pm1\quad\pm2\quad\pm3\quad\pm4\quad\pm6\quad\pm12$
- i **divisori del 1° COEFF.** sono i numeri $\pm1\quad\pm3$
  quindi i "**possibili zeri razionali**"
  (in pratica: i "numeri con cui provare a sostituire, sperando di ottenere 0"), saranno:
  $\pm1\quad\pm2\quad\pm3\quad\pm4\quad\pm6\quad\pm12\quad\pm\frac{1}{3}\quad\pm\frac{2}{3}\quad\pm\frac{4}{3}$

Si vede, col calcolo, che risulta $P(2)=0$.
Allora $P(x)$ sarà scomponibile nel prodotto $Q(x)\cdot(x-2)$
essendo $Q(x)$ il quoziente della divisione $P(x):(x-2)$.
Andiamo perciò a calcolare tale quoziente mediante la Regola di Ruffini.

$\left(3x^3+5x^2-16x-12\right):\left(x-2\right)$

	3	5	−16	−12
2		6	22	12
	3	11	6	0

$\rightarrow\ Q(x)=3x^2+11x+6$

In definitiva $\boxed{3x^3+5x^2-16x-12=\left(3x^2+11x+6\right)\left(x-2\right)}\underset{\substack{\textit{trinomio}\\ \textit{non speciale}}}{=}\ \dots\ =\left(3x+2\right)\left(x+3\right)\left(x-2\right)$

Il polinomio ha finalmente "ceduto": evviva! Siamo riusciti a scomporlo!!!

b) Sotto ora con un nuovo polinomio: $P(a)=6a^4+7a^3+6a^2+3a-2$

Divisori del T. N. : $\pm1 \quad \pm2$

Divisori del 1° COEFF. : $\pm1 \quad \pm2 \quad \pm3 \quad \pm6$

Possibili zeri razionali: $\pm1 \quad \pm2 \quad \pm\frac{1}{2} \quad \pm\frac{1}{3} \quad \pm\frac{2}{3} \quad \pm\frac{1}{6}$

$P(1)=6+7+6+3-2\neq0;$

$P(-1)=6-7+6-3-2=0,\ \ OK$

$$\underset{a-(-1)}{\left(6a^4+7a^3+6a^2+3a-2\right):(a+1)} \qquad \begin{array}{c|cccc|c} & 6 & 7 & 6 & 3 & -2 \\ -1 & & -6 & -1 & -5 & 2 \\ \hline & 6 & 1 & 5 & -2 & 0 \end{array}$$

$$6a^4+7a^3+6a^2+3a-2=\underbrace{\left(6a^3+a^2+5a-2\right)}_{\text{e questo sarà ora il nostro nuovo }P(a)}(a+1)$$

La timida Marinella si sente in imbarazzo di fronte alla difficoltà di questo argomento. Dài, Marinella, coraggio! La teoria è complicata, senza dubbio, ma in compenso l'applicazione pratica, con un po' di esercizio, non è niente di speciale.

A questo punto, per scomporre il nuovo polinomio $6a^3+a^2+5a-2$, che per comodità indicheremo ancora col simbolo $P(a)$, ricorreremo ancora al metodo di Ruffini.
I possibili zeri razionali sono rimasti gli stessi di prima.
Segnaliamo però che, come si potrebbe dimostrare (vuoi pensarci su?), "i numeri con cui si è già tentato in precedenza senza successo non potranno andar bene nemmeno ora";
quindi, essendo inutile il calcolo di $P(1)$, riprendiamo i nostri tentativi da $P(-1)$:

$P(-1)=-6+1-5-2\neq0;\qquad P(2)=48+4+10-2\neq0;\qquad P(-2)=-48+4-10-2\neq0;$

$P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\cancel{6}^3}{\cancel{8}_4}+\frac{1}{4}+\frac{5}{2}-2\neq0;\quad P\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\cancel{6}^3}{\cancel{8}_4}+\frac{1}{4}-\frac{5}{2}-2\neq0;\quad P\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\cancel{6}^2}{\cancel{27}_9}+\frac{1}{9}+\frac{5}{3}-2=0\ \ OK$

$$\left(6a^3+a^2+5a-2\right):\left(a-\frac{1}{3}\right) \qquad \begin{array}{c|ccc|c} & 6 & 1 & 5 & -2 \\ \frac{1}{3} & & 2 & 1 & 2 \\ \hline & 6 & 3 & 6 & 0 \end{array}$$

$$\boxed{6a^4+7a^3+6a^2+3a-2}=\left(6a^3+a^2+5a-2\right)(a+1)=$$

$$=\left(6a^2+3a+6\right)\left(a-\frac{1}{3}\right)(a+1)=\cancel{3}\left(2a^2+a+2\right)\left(\frac{3a-1}{\cancel{3}}\right)(a+1)=\boxed{\left(2a^2+a+2\right)(3a-1)(a+1)}$$

c) Vogliamo infine fattorizzare $x^3-3x^2y+4xy^2-4y^3$.

Qui ci troviamo di fronte a un polinomio IN DUE VARIABILI, OMOGENEO.
Se non ci fosse la seconda lettera, ossia la *y*, avremmo una situazione "standard" nella quale i numeri con cui "tentare" sarebbero $\pm1,\ \pm2,\ \pm4$.
Invece c'è *y* come seconda lettera, e il polinomio è omogeneo.
Bene! Si tratterà semplicemente di comportarsi come se la variabile del polinomio fosse solo la *x*, e la *y* facesse invece parte dei coefficienti; e di effettuare i "tentativi" con i monomi $\pm y,\ \pm2y,\ \pm4y$.

$x^3-3x^2y+4xy^2-4y^3=P(x)$

$P(y)\overset{\text{NOTA}}{=}y^3-3y^2\cdot y+4y\cdot y^2-4y^3=y^3-3y^3+4y^3-4y^3=-2y^3\neq0;$

$P(-y)=(-y)^3-3(-y)^2y+4(-y)y^2-4y^3=-y^3-3y^3-4y^3-4y^3=-12y^3\neq0;$

$P(2y)=(2y)^3-3(2y)^2\cdot y+4\cdot2y\cdot y^2-4y^3=8y^3-12y^3+8y^3-4y^3=0\ \ OK$

$$\left(x^3-3x^2y+4xy^2-4y^3\right):(x-2y) \qquad \begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -3y & 4y^2 & -4y^3 \\ 2y & & 2y & -2y^2 & 4y^3 \\ \hline & 1 & -y & 2y^2 & 0 \end{array}$$

$$\left(x^3-3x^2y+4xy^2-4y^3\right)=\left(x^2-xy+2y^2\right)(x-2y)$$

NOTA
Il polinomio è pensato nella variabile x: il simbolo $P(x)$ *indica proprio questo fatto. In questo contesto, il simbolo* $P(y)$ *viene invece ad indicare "ciò che si ottiene prendendo il polinomio* $P(x)$ *e andando a sostituire y al posto della variabile x".*

Gli **ESERCIZI** sulle scomposizioni col metodo di Ruffini si trovano alla successiva **pagina 238**.