

**ESERCIZI (scomposizione col metodo di RUFFINI)**

- 1)  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$     2)  $24x^3 - 26x^2 + 9x - 1$     3)  $y^3 + 2y^2 - 5y - 6$     4)  $3a^3 + 2a^2 + 2a - 1$   
 5)  $t^4 + 10t^3 + 35t^2 + 50t + 24$     6)  $4x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 5x + 1$     7)  $x^3 + 3x - 4$     8)  $a^5 - 4a^4 + 5a^3 - a^2 - 2a + 1$   
 9)  $3w^3 - 5w^2 - w + 2$     10)  $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$     11)  $t^5 - 10t^4 + 35t^3 - 50t^2 + 24t$     12)  $c^5 + c^4 + 4c^2$   
 13)  $18x^3 + 21x^2 + 8x + 1$     14)  $2a^3 - 4a^2 - 14a - 8$     15)  $2b^3 - 5b^2 + 5b - 3$     16)  $12z^3 - 72z^2 + 63z - 15$   
 17)  $x^3 - x^2y - 8xy^2 + 12y^3$     18)  $a^3 - 7ab^2 + 6b^3$     19)  $x^6 + x^5y - x^4y^2 - 2x^3y^3 - x^2y^4 + xy^5 + y^6$

**RISULTATI**

- 1)  $(x-1)(x-2)(x-3)$     2)  $(2x-1)(3x-1)(4x-1)$     3)  $(y+1)(y-2)(y+3)$     4)  $(3a-1)(a^2+a+1)$   
 5)  $(t+1)(t+2)(t+3)(t+4)$     6)  $(2x-1)^2(x^2-x+1)$     7)  $(x-1)(x^2+x+4)$     8)  $(a-1)^3(a^2-a-1)$   
 9)  $(3w-2)(w^2-w-1)$     10)  $(x+1)^2(x-2)^2$     11)  $t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)$     12)  $c^2(c+2)(c^2-c+2)$   
 13)  $(2x+1)(3x+1)^2$     14)  $2(a+1)^2(a-4)$     15)  $(2b-3)(b^2-b+1)$     16)  $3(z-5)(2z-1)^2$   
 17)  $(x-2y)^2(x+3y)$     18)  $(a-b)(a-2b)(a+3b)$     19)  $(x-y)^2(x+y)^2(x^2+xy+y^2)$

**8. DIVISIBILITA'; FORMULE RELATIVE  
A UNA SOMMA O DIFFERENZA DI DUE POTENZE DI UGUAL GRADO**

Il numero 44 **NON E' divisibile** per 7. Infatti 44 diviso 7 fa 6 **COL RESTO DI 2**.

Invece 91 **E' divisibile** per 7. Infatti 91 diviso 7 fa 13 **CON RESTO 0**.

Analogamente, dati due polinomi nella stessa variabile  $A(x)$  e  $B(x)$ ,

**si dice che  $A(x)$  è divisibile per  $B(x)$  se e solo se la divisione  $A(x):B(x)$  ha come resto 0.**

**Insomma, l'aggettivo "divisibile", in matematica, significa sempre "divisibile con resto 0".**

Supponiamo ora che il polinomio divisore sia un binomio della forma  $(x-k)$ ; in questa situazione il "Teorema del Resto", affermando che il resto di una divisione della forma  $P(x):(x-k)$  è uguale a  $P(k)$ , ci fornisce un vero e proprio "Criterio di divisibilità":

**il polinomio  $P(x)$  è divisibile per il binomio  $(x-k)$  se e solo se  $P(k) = 0$ .**

Osserviamo che la "divisibilità" porta con sé la "possibilità di fattorizzazione":

- poiché 91 è divisibile per 7, si può scrivere  $91 = 7 \cdot 13$
- e se un polinomio  $P(x)$  è divisibile per  $(x-k)$ , allora si potrà fattorizzare in  $(x-k) \cdot (\text{quoziente})$ .

Ciò premesso, domandiamoci:

**una differenza o una somma di due potenze di ugual grado**

- è o non è divisibile per la differenza delle basi?  
 è o non è divisibile per la somma delle basi?

- Insomma: i)  $a^n - b^n$  è o non è divisibile per  $(a-b)$ ?  
 ii)  $a^n + b^n$  è o non è divisibile per  $(a-b)$ ?  
 iii)  $a^n - b^n$  è o non è divisibile per  $(a+b)$ ?  
 iv)  $a^n + b^n$  è o non è divisibile per  $(a+b)$ ?

Vediamo.

- i)  $a^n - b^n$  è o non è divisibile per  $(a-b)$ ?

Per rispondere, applicheremo il "Criterio di divisibilità", quindi penseremo il polinomio  $a^n - b^n$  come dipendente dalla variabile  $a$ , e andremo a calcolare  $P(b)$ , per verificare se è o non è uguale a zero.

$$a^n - b^n = P(a)$$

Domanda:  $a^n - b^n = P(a)$  è o non è divisibile per  $(a-b)$ ?

$P(b) \stackrel{=}{=} b^n - b^n = 0$ , quindi la risposta è: SI'

NOTA

Bene, abbiamo allora stabilito che

$a^n - b^n$ , qualunque sia  $n$ , è sempre divisibile per  $(a-b)$

NOTA: il polinomio  $P$ , ribadiamolo, è pensato nella variabile  $a$ :  $P = P(a)$ . Il simbolo  $P(b)$  indica dunque in questo contesto il numero che si ottiene sostituendo al posto della variabile (che è  $a$ ), il numero  $b$ .

Ciò assicura che deve esistere una formula del tipo  $a^n - b^n = (a-b)(\dots)$

Cosa metteremo al posto dei puntini?

Ci metteremo il quoziente della divisione  $(a^n - b^n) : (a-b)$ , da determinarsi con la regola di Ruffini.

	1	0	0	0	...	0	$-b^n$
$b$		$b$	$b^2$	$b^3$	...	$b^{n-1}$	$b^n$
	1	$b$	$b^2$	$b^3$	...	$b^{n-1}$	0

Quindi: 
$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$$

ii)  $a^n + b^n$  è o non è divisibile per  $(a-b)$ ?

$$a^n + b^n = P(a)$$

Domanda:  $a^n + b^n = P(a)$  è o non è divisibile per  $(a-b)$ ?

$P(b) = b^n + b^n = 2b^n \neq 0$ , quindi la risposta è: NO

$a^n + b^n$  non è mai divisibile per  $(a-b)$ ;  
non esiste alcuna fattorizzazione della forma  $a^n + b^n = (a-b) \cdot (\dots)$

iii)  $a^n - b^n$  è o non è divisibile per  $(a+b)$ ?

$$a^n - b^n = P(a)$$

Domanda:  $a^n - b^n = P(a)$  è o non è divisibile per  $(a+b)$ ?

$$P(-b) = (-b)^n - b^n = \begin{cases} b^n - b^n = 0 & \text{se } n \text{ è PARI} \\ -b^n - b^n = -2b^n \neq 0 & \text{se } n \text{ è DISPARI} \end{cases} \text{ e perciò}$$

$a^n - b^n$  è divisibile per  $(a+b)$  quando  $n$  è PARI, mentre NON lo è quando  $n$  è DISPARI.

Nel caso di  $n$  PARI, esisterà dunque una formula del tipo  $a^n - b^n = (a+b)(\dots)$  dove al posto dei (...) andrà messo il quoziente della divisione  $(a^n - b^n) : (a+b)$ , determinabile con la regola di Ruffini.

	1	0	0	0	...	0	$-b^n$
$-b$		$-b$	$+b^2$	$-b^3$	...	$-b^{n-1}$	$+b^n$
	1	$-b$ <i>esponente dispari, segno -</i>	$+b^2$	$-b^3$ <i>esponente dispari, segno -</i>	...	$-b^{n-1}$ <i>esp. dispari (n è pari!), segno -</i>	0

Quindi: 
$$\text{con } n \text{ PARI, } a^n - b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - b^{n-1}) \quad [\text{segni alterni}]$$

iv)  $a^n + b^n$  è o non è divisibile per  $(a+b)$ ?

$$a^n + b^n = P(a)$$

Domanda:  $a^n + b^n = P(a)$  è o non è divisibile per  $(a+b)$ ?

$$P(-b) = (-b)^n + b^n = \begin{cases} b^n + b^n = 2b^n \neq 0 & \text{se } n \text{ è PARI} \\ -b^n + b^n = 0 & \text{se } n \text{ è DISPARI} \end{cases} \text{ e perciò}$$

$a^n + b^n$  è divisibile per  $(a+b)$  quando  $n$  è DISPARI, mentre NON lo è quando  $n$  è PARI

Nel caso di  $n$  DISPARI, esisterà dunque una formula  $a^n + b^n = (a+b)(\dots)$  dove al posto dei puntini andrà messo il quoziente della divisione  $(a^n + b^n) : (a+b)$ , determinabile con la regola di Ruffini.

	1	0	0	0	...	0	$+b^n$
$-b$		$-b$	$+b^2$	$-b^3$	...	$+b^{n-1}$	$-b^n$
	1	$-b$ <i>esponente dispari, segno -</i>	$+b^2$	$-b^3$ <i>esponente dispari, segno -</i>	...	$+b^{n-1}$ <i>+, perchè n-1 è pari in quanto n è dispari</i>	0

Quindi: 
$$\text{con } n \text{ DISPARI, } a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + b^{n-1}) \quad [\text{segni alterni}]$$