9. SCOMPOSIZIONI "A BLOCCHI"

a)

$$a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3+c^3=$$
$$=\left(a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3\right)+c^3=$$
$$=(a-2b)^3+c^3=$$
$$=\left[(a-2b)+c\right]\left[(a-2b)^2-(a-2b)\cdot c+c^2\right]=$$
$$=(a-2b+c)\left(a^2-4ab+4b^2-ac+2bc+c^2\right)$$

Il polinomio $a-2b$ è stato qui utilizzato come "blocco".
Avremmo anche potuto, volendo, inserire dei passaggi intermedi, con la sostituzione $a-2b=x$:

$$(a-2b)^3+c^3=x^3+c^3=(x+c)\left(x^2-x\cdot c+c^2\right)$$

Risostituendo a questo punto $a-2b$ al posto di x, il gioco è fatto:

$$\left[(a-2b)+c\right]\left[(a-2b)^2-(a-2b)\cdot c+c^2\right]=$$
$$=(a-2b+c)\left(a^2-4ab+4b^2-ac+2bc+c^2\right)$$

b)

$$(x+y)^3-(x-y)^3=$$
$$=\left[(x+y)-(x-y)\right]\left[(x+y)^2+(x+y)(x-y)+(x-y)^2\right]=$$
$$=(\cancel{x}+y\cancel{-x}+y)\left(x^2\cancel{+2xy}\cancel{+y^2}+x^2\cancel{-y^2}+x^2\cancel{-2xy}+y^2\right)=$$
$$=2y\left(3x^2+y^2\right)$$

E' ovvio che avremmo potuto anche svolgere il calcolo "normalmente", ottenendo:

$$(x+y)^3-(x-y)^3=$$
$$=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3+$$
$$-\left(x^3-3x^2y+3xy^2-y^3\right)=$$
$$=\cancel{x^3}+3x^2y\cancel{+3xy^2}+y^3\cancel{-x^3}+3x^2y\cancel{-3xy^2}+y^3=$$
$$=6x^2y+2y^3=2y\left(3x^2+y^2\right)$$

c)

$$(5x+3)^4-(x+1)^4=$$
$$=\left[(5x+3)^2+(x+1)^2\right]\left[(5x+3)^2-(x+1)^2\right]=$$
$$=\left[25x^2+30x+9+x^2+2x+1\right](5x+3+x+1)(5x+3-x-1)=$$
$$=\left(26x^2+32x+10\right)(6x+4)(4x+2)=$$
$$=2\left(13x^2+16x+5\right)\cdot 2(3x+2)\cdot 2(2x+1)=$$
$$=8\left(13x^2+16x+5\right)(3x+2)(2x+1)$$

d)

$$(a+b+c)^2-8(a+b+c)+12=$$
$$\underset{a+b+c=t}{=}t^2-8t+12=(t-2)(t-6)=$$
$$=(a+b+c-2)(a+b+c-6)$$

Qui abbiamo ritenuto di effettuare *esplicitamente* la "posizione" intermedia $a+b+c=t$.
D'altra parte, i passaggi intermedi di questo tipo si possono tranquillamente saltare, facendoli a mente o comunque "trattando", nella propria mente, il polinomio $a+b+c$ come un "blocco" che viene manipolato come se si trattasse di una singola lettera.

e)

$$(a+b)^3-(a+b)^2+2$$

Poniamo $a+b=t$ e avremo:

$$t^3-t^2+2$$

che potremo scomporre con Ruffini.

$$\mathrm{P}(t)=t^3-t^2+2$$
$$\mathrm{P}(-1)=-1-1+2=0,\quad OK$$

$$\left(t^3-t^2+2\right):(t+1)$$

	1	−1	0	2
−1		−1	2	−2
	1	−2	2	0

$$t^3-t^2+2=\left(t^2-2t+2\right)(t+1)$$

Quindi, andando a risostituire $a+b$ al posto di t, la nostra scomposizione sarà

$$\left[(a+b)^2-2(a+b)+2\right](a+b+1)=\left(a^2+2ab+b^2-2a-2b+2\right)(a+b+1)$$

10. SCOMPOSIZIONI IN CUI OCCORRE RACCOGLIERE UN POLINOMIO

a) $x^2+2x+2y-y^2=x^2-y^2+2x+2y=(x+y)(x-y)+2(x+y)=(x+y)(x-y+2)$

b) $a^3+b^3+a^2+b^2+2ab=\left(a^3+b^3\right)+\left(a^2+b^2+2ab\right)=$
$=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)+(a+b)^2=(a+b)\left(a^2-ab+b^2+a+b\right)$

c) $8(x-3)(x-5)^2-10(x-3)^2(x-5)=$
$=2(x-3)(x-5)[4(x-5)-5(x-3)]=$
$=2(x-3)(x-5)[4x-20-5x+15]=$
$=2(x-3)(x-5)(-x-5)=$
$=-2(x-3)(x-5)(x+5)$

d) $a^3-b^3-a^2-ab+2b^2=\left(a^3-b^3\right)-\left(a^2+ab-2b^2\right)=$
$=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)-(a+2b)(a-b)=(a-b)\left(a^2+ab+b^2-a-2b\right)$

ESERCIZI (scomposizioni nelle quali un polinomio è utilizzato come un "blocco", o nelle quali occorre raccogliere un polinomio)

1) $a^3+(b+c)^3$
2) $x^3-y^3-3y^2-3y-1$
3) $(a+b+c+1)^4-(a+b+c+1)^2$
4) $(x+y)^2+5(x+y)+6$
5) $(x+y)^2+2z(x+y)+z^2$
6) $4(a+b-c)^2+4(a+b-c)+1$
7) $(2a+b)^3-(a+2b)^3$
8) $8(x-1)^3+27=(2x-2)^3+27$
9) $(x-5)^3+(x-5)^2$
10) $(x+y)^3(x-y)-(x+y)(x-y)^3$
11) $(a+1)(a+2)(a+3)+(a+2)(a+3)(a+4)$
12) $(a+b+1)^2-2a-2b-2$
13) $x^2(x+1)(x+2)+x(x+1)^2(x+2)+x(x+1)(x+2)^2$
14) $4a^3(a-1)^3+6a^4(a-1)^2$
15) x^2-y^2+x+y
16) $a^2-3ab+2b^2-a+2b$
17) $w^4+w^3-w^2-2w-1$
18) $t^4+t^3+t^2-1$
19) $ab^2-4a+3b+6$
20) $x^3-x^2+y^2-y^3$

RISULTATI

1) $(a+b+c)\left(a^2-ab-ac+b^2+2bc+c^2\right)$
2) $(x-y-1)\left(x^2+xy+x+y^2+2y+1\right)$
3) $(a+b+c+1)^2(a+b+c+2)(a+b+c)$
4) $(x+y+2)(x+y+3)$
5) $(x+y+z)^2$
6) $(2a+2b-2c+1)^2$
7) $(a-b)\left(7a^2+13ab+7b^2\right)$
8) $(2x+1)\left(4x^2-14x+19\right)$
9) $(x-5)^2(x-4)$
10) $4xy(x+y)(x-y)$
11) $(a+2)(a+3)(2a+5)$
12) $(a+b+1)(a+b-1)$
13) $3x(x+1)^2(x+2)$
14) $2a^3(a-1)^2(5a-2)$
15) $(x+y)(x-y+1)$
16) $(a-2b)(a-b-1)$
17) $(w+1)\left(w^3-w-1\right)$
18) $(t+1)\left(t^3+t-1\right)$
19) $(b+2)(ab-2a+3)$
20) $(x-y)\left(x^2+xy+y^2-x-y\right)$