

2. MOLTIPLICAZIONI, DIVISIONI E POTENZE DI FRAZIONI ALGEBRICHE

Queste facili operazioni sono illustrate dai seguenti esempi svolti.

$$1) \frac{3a}{4x} \cdot \frac{5b}{x^5} = \frac{15ab}{4x^6} \quad 2) \frac{14a^8}{11x^2} \cdot \frac{33x}{35a^3} \quad \text{Qui, prima di moltiplicare, conviene semplificare: } \rightarrow \frac{\overset{2}{\cancel{14}}a^{\cancel{8}^5}}{\cancel{11}x^{\cancel{2}^1}} \cdot \frac{\overset{3}{\cancel{33}}\cancel{x}}{\overset{5}{\cancel{35}}\cancel{a}^3} = \frac{6a^5}{5x}$$

$$3) \frac{a+2}{a+3} \cdot \frac{a+1}{a+4} = \frac{(a+2)(a+1)}{(a+3)(a+4)} \rightarrow \text{Psst ... dimmi, in confidenza ...}$$

Nel 3), non avevi mica pensato di semplificare le a fra loro, o il 2 col 4? ☹
GUAI! E' errore gravissimo semplificare addendo con addendo!

$$4) \frac{x^2-4}{x^2+10x+25} \cdot \frac{4x+20}{x-2} = \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{(x+5)^2} \cdot \frac{4\cancel{(x+5)}}{\cancel{x-2}} = \frac{4(x+2)}{x+5} \rightarrow$$

**IN PRESENZA DI POLINOMI,
PRIMA DI MOLTIPLICARE
conviene
SCOMPORRE IN FATTORI
nella speranza che sia possibile
SEMPLIFICARE**

$$5) \frac{7a^2}{3b} \cdot \frac{14a^2}{3b^4} = \frac{\cancel{7}a^{\cancel{2}^4}}{\cancel{3}b} \cdot \frac{\cancel{14}b^{\cancel{4}^3}}{\cancel{2}\cancel{14}a^2} = \frac{b^3}{2}$$

$$6) \frac{a^2+a-2}{a^2-a-6} \cdot \frac{a-1}{a-3} = \frac{\cancel{(a-1)}\cancel{(a+2)}}{\cancel{(a+2)}\cancel{(a-3)}} \cdot \frac{\cancel{a-3}}{\cancel{a-1}} = 1$$

$$7) \frac{4t-4}{t-2} \cdot \frac{t^3-t^2-4t+4}{t+2} = \frac{4(t-1)}{t-2} \cdot \frac{t+2}{t^2(t-1)-4(t-1)} = \frac{4\cancel{(t-1)}}{t-2} \cdot \frac{\cancel{t+2}}{\cancel{(t-1)}\cancel{(t+2)}(t-2)} = \frac{4}{(t-2)^2}$$

$$8) \frac{3a+3}{a+2} : (a+1)^3 = \frac{3\cancel{(a+1)}}{a+2} \cdot \frac{1}{(a+1)^{\cancel{3}^2}} = \frac{3}{(a+2)(a+1)^2}$$

$$9) \left(\frac{2xy^2z^3}{5a}\right)^4 = \frac{16x^4y^8z^{12}}{625a^4}$$

$$10) \left(\frac{a+b}{a}\right)^3 = \frac{(a+b)^3}{a^3}$$

$$11) \frac{h-1}{h^2+h} : \left(\frac{h^2-h}{h^2} \cdot \frac{h-1}{2}\right) = \frac{h-1}{h(h+1)} : \left[\frac{\cancel{h}(h-1)}{h^2} \cdot \frac{h-1}{2}\right] =$$

$$= \frac{h-1}{h(h+1)} : \frac{(h-1)^2}{2h} = \frac{\cancel{h-1}}{\cancel{h}(h+1)} \cdot \frac{2\cancel{h}}{(h-1)^{\cancel{2}^1}} = \frac{2}{(h+1)(h-1)}$$

$$12) \left(\frac{a-b}{2a+2b}\right)^2 : \frac{a^2-3ab+2b^2}{a^2-4ab+4b^2} \cdot 4 =$$

$$= \left[\frac{a-b}{2(a+b)}\right]^2 : \frac{(a-b)\cancel{(a-2b)}}{(a-2b)^2} \cdot 4 = \frac{(a-b)^{\cancel{2}^1}}{\cancel{2}(a+b)^2} \cdot \frac{a-2b}{\cancel{a-b}} \cdot \cancel{4} = \frac{(a-b)(a-2b)}{(a+b)^2}$$

$$13) (4x^6-40x^4+36x^2) : (x^3-3x^2-x+3) : (-4x^2) = 4x^2(x^4-10x^2+9) \cdot \frac{1}{x^2(x-3)-(x-3)} \cdot \left(-\frac{1}{4x^2}\right) =$$

$$= \cancel{4x^2}(\cancel{x^2-1})(x^2-9) \cdot \frac{1}{(x-3)\cancel{(x^2-1)}} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{4x^2}}\right) = -\frac{(x+3)\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}} = -(x+3)$$

$$14) (x-2) : \frac{x^3-x^2-3x+2}{x^4+2x^3+x^2-1} = (x-2) : \frac{(x-2)\cancel{(x^2+x-1)}}{(x^2+x+1)\cancel{(x^2+x-1)}} = \cancel{(x-2)} \cdot \frac{x^2+x+1}{\cancel{x-2}} = x^2+x+1$$

$$* x^3 - x^2 - 3x + 2$$

$$** x^4 + 2x^3 + x^2 - 1 =$$

$$\text{Con Ruffini: } P(2) = 0 \quad 2 \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 2 \\ & 2 & 2 & -2 \\ & 1 & 1 & -1 \\ & & & 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x^3 - x^2 - 3x + 2 = \\ = (x-2)(x^2+x-1) \end{array} \quad \begin{array}{l} = (x^2+x)^2 - 1 = \\ = (x^2+x+1)(x^2+x-1) \end{array}$$

ESERCIZI (moltiplicazioni, divisioni, potenze di frazioni algebriche)

- 1) $\frac{9a^3}{b^2} \cdot \frac{b^3}{18a^5}$ 2) $\frac{2}{3} \cdot \frac{8x}{y} \cdot \frac{9y^2}{16x}$ 3) $\frac{4}{t} \cdot \frac{t^2}{8} \cdot \frac{1}{ty}$ 4) $\frac{a^4}{b^4} \cdot \left(-\frac{b^3}{a^3}\right)$
- 5) $\frac{3a}{2b} : \frac{a}{4b^2}$ 6) $-\frac{2x^3}{x^2y} : \left(-\frac{3}{4y^2}\right)$ 7) $\frac{a}{b} : \frac{1}{b^2}$ 8) $\frac{a}{b} : b^2$
- 9) $\frac{x^2 - y^2}{x^2 - 2xy + y^2} \cdot \frac{x - y}{x + y}$ 10) $\frac{a^2 + 4a + 3}{a^2 + 5a + 4} \cdot \frac{2a + 8}{2a + 6}$
- 11) $\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 4}$ 12) $\frac{q}{q^2 + 1} \cdot \frac{q^3 + q^2 + q + 1}{q^2 + q}$
- 13) $\frac{6a - 3}{a^2 + 2a + 1} \cdot \frac{a^3 + 3a^2 + 3a + 1}{4a^2 - 1}$ 14) $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 2} \cdot (x + 1)$
- 15) $\frac{a^2 - 7a + 6}{a^2 - 2a} \cdot \frac{a^3 - 2a^2 + a}{a^2 - 9a + 18}$ 16) $\frac{x^2 - 9x + 14}{x^6 - 2x^5} \cdot \frac{x^3y}{x^2 - 14x + 49}$
- 17) $\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{3x^2 + 2x - 1} \cdot \frac{9x^2 - 6x + 1}{3x^4 + 6x^2 + 3}$ 18) $\frac{a^2 + b^2 + 2ab - 4}{a^2 - 4} \cdot \frac{3a - 6}{a + b - 2} \cdot \frac{a + 2}{3a + 3b + 6}$
- 19) $\frac{a^2 - b^2}{a - b} : \frac{a^4 - b^4}{a^2 - ab}$ 20) $\frac{x - 2}{x - 3} : \frac{x^2 - 6x + 8}{3x^2 - 21x + 36}$
- 21) $\frac{3x - 3t}{xy - tx - ty + t^2} : (6y - 6t)$ 22) $\frac{y^3 - 3y^2 - 2y + 6}{y^2 - 1} : \frac{y^4 - 3y^2 + 2}{y^3 + y^2 - y - 1}$
- 23) $\left(\frac{3a - 2b}{c^2}\right)^3 \cdot \frac{c^4}{9a^2 - 12ab + 4b^2}$ 24) $\left(-\frac{3x}{y^3}\right)^2 : \left(-\frac{x}{y^2}\right)^3$
- 25) $\left(\frac{2a - b}{2a + b}\right)^4 : (2a - b)^2$ 26) $(a^2 - b^2)^2 \cdot \frac{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}{a^2 + a + b + ab} \cdot \frac{a^2 + a - b - ab}{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$
- 27) $\frac{12n^2 - 7n + 1}{6n^2 - 5n + 1} \cdot \frac{4n^2 - 1}{16n^2 - 1}$ 28) $\frac{a^2 - 5ab + 6b^2}{a^2 - ab - 6b^2} \cdot \frac{a^2 + ab - 2b^2}{a^2 - 3ab + 2b^2}$
- 29) $\frac{a^3 - 3a^2 + 3a - 2}{a^2 - a} : \frac{a^2 - a + 1}{a^2 - 2a + 1}$ (Ruffini) 30) $\frac{x^3 - 7x + 6}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} \cdot \frac{x - 2}{x + 3}$ (Ruffini)
- 31) $\frac{a^3 - b^3}{a + b} : \frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - b^2}$ 32) $\frac{(x + y)^3 + (x + y)^4}{x^2} \cdot \frac{x^2}{(x + y)^3}$

RISULTATI

- 1) $\frac{b}{2a^2}$ 2) $3y$ 3) $\frac{1}{2y}$ 4) $-\frac{a}{b}$ 5) $6b$ 6) $\frac{8xy}{3}$ 7) ab 8) $\frac{a}{b^3}$
- 9) 1 10) 1 11) $\frac{(x+2)(x-1)}{(x+1)(x-2)}$ 12) 1 13) $\frac{3(a+1)}{2a+1}$ 14) $x-1$
- 15) $\frac{(a-1)^3}{(a-2)(a-3)}$ 16) $\frac{y}{x^2(x-7)}$ 17) $\frac{3x-1}{3(x^2+1)}$ 18) 1 19) $\frac{a}{a^2+b^2}$ 20) 3
- 21) $\frac{1}{2(y-t)^2}$ 22) $\frac{y-3}{y-1}$ 23) $\frac{3a-2b}{c^2}$ 24) $-\frac{9}{x}$ 25) $\frac{(2a-b)^2}{(2a+b)^4}$ 26) $(a+b)^4$
- 27) $\frac{2n+1}{4n+1}$ 28) 1 29) $\frac{(a-2)(a-1)}{a}$ 30) 1 31) $(a-b)^2$ 32) $1+x+y$