3. POLINOMI OPPOSTI

Due polinomi sono detti “**opposti**” quando **i termini dell’uno sono gli opposti dei termini dell’altro**.

Esempi:

$\boxed{a-5}$ *e* $\boxed{-a+5}$ (*per eleganza, si scrive preferibilmente* $\boxed{5-a}$ *anziché* $-a+5$)

$\boxed{3x^2-xy+y^2}$ *e* $\boxed{-3x^2+xy-y^2}$

Due polinomi opposti esprimono numeri opposti,
nel senso che, se si prendono due polinomi opposti,
e alla lettera (o alle lettere) si attribuisce, nei due polinomi, lo stesso valore,
si ottengono due risultati opposti.

	$\boxed{a-5}$	$\boxed{-a+5}$
$a=2$	-3	$+3$
$a=0$	-5	$+5$
$a=9$	4	-4
$a=-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}-5=-\frac{11}{2}$	$+\frac{1}{2}+5=+\frac{11}{2}$

D’altronde, mettendo in evidenza il segno $-$, abbiamo:

$$-a+5=-(a-5)$$

ossia : il numero $-a+5$ è l'opposto del numero $a-5$

E analogamente:

$$-3x^2+xy-y^2=-\left(3x^2-xy+y^2\right)$$

- Il **rapporto (= quoziente)** fra due polinomi opposti vale sempre -1,
perché il rapporto fra due numeri opposti vale sempre -1;
d’altronde, mettendo in evidenza il segno $-$, si ottiene:

$$\frac{-a+5}{a-5}=\frac{-\cancel{(a-5)}}{\cancel{a-5}}=-1 \qquad \frac{a-5}{-a+5}=\frac{-\cancel{(-a+5)}}{\cancel{-a+5}}=-1$$

- Invece la **somma algebrica** di due polinomi opposti vale 0,
perché la somma algebrica fra due numeri opposti vale, appunto, 0, e d’altronde:

$$(-a+5)+(a-5)=\cancel{-a}\cancel{+5}+\cancel{a}\cancel{-5}=0$$

- Il **prodotto** di due polinomi opposti è uguale all’opposto del quadrato di uno qualsiasi di essi:

$$(-a+5)(a-5)=-(a-5)(a-5)=-(a-5)^2=-(-a+5)^2$$

- **Se si prendono due numeri opposti e li si eleva allo stesso esponente PARI, i risultati saranno UGUALI**:

$$(+5)^2=+25 \qquad (-5)^2=+25$$

$$\left(+\frac{1}{2}\right)^4=+\frac{1}{16} \qquad \left(-\frac{1}{2}\right)^4=+\frac{1}{16}$$

- … e invece **se si prendono due numeri opposti e li si eleva allo stesso esponente DISPARI, i risultati saranno OPPOSTI**:

$$(+5)^3=+125 \qquad (-5)^3=-125$$

$$\left(+\frac{1}{2}\right)^5=+\frac{1}{32} \qquad \left(-\frac{1}{2}\right)^5=-\frac{1}{32}$$

Coi polinomi, tutto ciò si traduce in **IMPORTANTISSIME IDENTITA’** come le seguenti:

$$\boxed{\begin{array}{l}(-a+5)^2=(a-5)^2\\(-a+5)^3=-(a-5)^3\\(-a+5)^4=(a-5)^4\\(-a+5)^5=-(a-5)^5\end{array}}$$

perché, in dettaglio, $(-a+5)^2=[-(a-5)]^2=+(a-5)^2$

" $(-a+5)^3=[-(a-5)]^3=-(a-5)^3$

" $(-a+5)^4=[-(a-5)]^4=+(a-5)^4$

" $(-a+5)^5=[-(a-5)]^5=-(a-5)^5$

Possiamo anche dire così (IMPORTANTE!):

♥ **quando un polinomio è elevato ad esponente PARI, è possibile cambiare i segni di tutti i termini e il valore del risultato non cambierà;**

♥ **quando un polinomio è elevato ad esponente DISPARI, se cambiamo i segni di tutti i termini il risultato si muterebbe nell’opposto, quindi per ripristinare l’uguaglianza occorre scrivere un segno “$-$” davanti.**

$(7-x)^2=(x-7)^2$

$(7-x)^3=-(x-7)^3$

COME FARE LE SEMPLIFICAZIONI QUANDO COMPAIONO POLINOMI OPPOSTI

1) $$\frac{9-x^2}{x^2-5x+6}=\frac{(3+x)(3-x)}{(x-2)(x-3)}=\frac{(x+3)\left[-(x-3)\right]}{(x-2)(x-3)}=\frac{-(x+3)\cancel{(x-3)}}{(x-2)\cancel{(x-3)}}=-\frac{x+3}{x-2}$$

o anche, direttamente: $$\frac{9-x^2}{x^2-5x+6}\underset{\substack{\text{dato che il quoziente}\\ \text{di due polinomi opposti}\\ \text{vale }-1}}{=}\frac{(3+x)\overset{-1}{\cancel{(3-x)}}}{(x-2)\cancel{(x-3)}}=-\frac{x+3}{x-2}$$ ♥

Volendo, si poteva pure procedere così: $$\frac{9-x^2}{x^2-5x+6}=\frac{-(x^2-9)}{(x-2)(x-3)}=\frac{-(x+3)\cancel{(x-3)}}{(x-2)\cancel{(x-3)}}=-\frac{x+3}{x-2}$$

2) $$\frac{(2a-b)\overset{-1}{\cancel{(-a-b+c)}}\ \overset{-1}{\cancel{(a-b)}}}{\cancel{(b-a)}\ \cancel{(a+b-c)}\ (a-3b)}=\frac{2a-b}{a-3b}$$

3) $$\frac{y^2-3y+2}{(1-y)^2}=\frac{(y-1)(y-2)}{(1-y)^2}=$$

- (NOTA 1) $\dfrac{\cancel{(y-1)}(y-2)}{(y-1)^{\cancel{2}}}=\dfrac{y-2}{y-1}$
- $\dfrac{-\cancel{(1-y)}(y-2)}{(1-y)^{\cancel{2}}}=-\dfrac{y-2}{1-y}\underset{\text{(NOTA 2)}}{=}\dfrac{y-2}{-(1-y)}=\dfrac{y-2}{y-1}$

NOTA 1 Come osservato, due polinomi opposti elevati al quadrato danno lo stesso risultato: $(1-y)^2=(y-1)^2$

NOTA 2 ♥ $-\dfrac{a}{b}=\dfrac{a}{-b}=\dfrac{-a}{b}$ *perché*
$$\frac{a}{-b}=\frac{a}{-1\cdot b}=\frac{1}{-1}\cdot\frac{a}{b}=-1\cdot\frac{a}{b}=-\frac{a}{b}$$
$$\frac{-a}{b}=\frac{-1\cdot a}{b}=\frac{-1}{1}\cdot\frac{a}{b}=-1\cdot\frac{a}{b}=-\frac{a}{b}$$

4) $$\frac{(x^2+x-1)^5}{(1-x-x^2)^4}=$$

- $\dfrac{(x^2+x-1)^{\cancel{5}}}{\cancel{(x^2+x-1)^4}}=x^2+x-1$
- $\dfrac{-(1-x-x^2)^{\cancel{5}}}{\cancel{(1-x-x^2)^4}}=-(1-x-x^2)=x^2+x-1$

♥ Tieni anche presente che **in una frazione è lecito cambiare i segni sia "sopra" che "sotto", perché in tal modo il valore della frazione non muta**:
$$\frac{4}{5}=\frac{-4}{-5},\quad \frac{5}{-7}=\frac{-5}{7},\quad \frac{3-x}{2-x}=\frac{x-3}{x-2}$$

ESERCIZI (semplificazioni con polinomi opposti)

1) $\dfrac{4(3x-2)}{2-3x}$ 2) $\dfrac{(-a-1)(a-5)}{(a+1)(a-4)}$ 3) $\dfrac{(x-y+t)(x+y+t)}{(x-y-t)(y-t-x)}$ 4) $\dfrac{1-x^2}{xy-x-y+1}$ 5) $\dfrac{a+b}{b+a}$

6) $\dfrac{(a-b)^8}{(b-a)^6}$ 7) $\dfrac{(b-a)^{11}}{(a-b)^4}$ 8) $\dfrac{2y-1}{3y-1}\cdot\dfrac{1-3y}{y(1-2y)}$ 9) $\dfrac{(2a-5)^3}{a-3}\cdot\dfrac{3-a}{(5-2a)^2}$ 10) $\dfrac{(n^2-1)^3}{(1-n)^2}$

11) $\dfrac{(1-x)(2-x)(3-x)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ 12) $\dfrac{(1-x)(2-x)}{(x-1)(x-2)}$ 13) $(a-b)^5(b-a)^4(b-a)^3$

RISULTATI

1) -4 2) $-\dfrac{a-5}{a-4}=\dfrac{5-a}{a-4}=\dfrac{a-5}{4-a}$ 3) $-\dfrac{x+y+t}{x-y-t}=\dfrac{x+y+t}{y+t-x}$ 4) $-\dfrac{x+1}{y-1}=\dfrac{1+x}{1-y}$ 5) 1 6) $(a-b)^2$

7) $-(a-b)^7=(b-a)^7$ 8) $\dfrac{1}{y}$ 9) $-(2a-5)=5-2a$ 10) $(n-1)(n+1)^3$ 11) -1 12) 1 13) $-(a-b)^{12}$