

4. SOMMA ALGEBRICA DI FRAZIONI ALGEBRICHE

Quando i denominatori sono **NUMERI**,
si fa esattamente come con le normali frazioni numeriche:

- A) si scrive, come denominatore comune, il minimo comune multiplo (m.c.m.) dei denominatori
B) si divide il denominatore comune per ciascun denominatore, e si moltiplica per “ciò che sta sopra”.

$$1) \frac{11x+4}{15} + \frac{x}{10} = \frac{2(11x+4)+3x}{30} = \frac{22x+8+3x}{30} = \frac{25x+8}{30}$$

$$2) \frac{a+2}{6} - \frac{5a+1}{9} + \frac{2a}{3} = \frac{3(a+2) - 2(5a+1) + 6 \cdot 2a}{18} = \frac{3a+6-10a-2+12a}{18} = \frac{5a+4}{18}$$

$$3) \text{ **IMPORTANTE!** } \frac{2x+1}{7} - \frac{x+4}{14} = \frac{2(2x+1) - (x+4)}{14} = \frac{4x+2-x-4}{14} = \frac{3x-2}{14}$$

Qui il segno $-$ si riferisce a “**TUTTO**” il polinomio $x+4$,
che quindi va scritto tra parentesi.
Ciò si tradurrà poi in un **DOPPIO CAMBIAMENTO DI SEGNO**.

Quando i denominatori sono **MONOMI**,
il minimo comun denominatore si ottiene prendendo:

- il m.c.m. dei coefficienti
- **TUTTE** le lettere, **COMUNI E NON COMUNI**,
ciascuna **UNA SOLA VOLTA** e con l'esponente più **ALTO**.

$$4) \frac{2a+b}{6a^3} - \frac{a+3b}{9a^2b} + \frac{2}{b^2} = \frac{3b^2(2a+b) - 2ab(a+3b) + 18a^3 \cdot 2}{18a^3b^2} =$$

$$= \frac{\cancel{6ab^2} + 3b^3 - 2a^2b - \cancel{6ab^2} + 36a^3}{18a^3b^2} = \frac{36a^3 - 2a^2b + 3b^3}{18a^3b^2}$$

$$5) \frac{y}{6x^4} - \frac{7}{4x^2y^2} = \frac{2y^2 \cdot y - 7 \cdot 3x^2}{12x^4y^2} = \frac{2y^3 - 21x^2}{12x^4y^2}$$

6) **IMPORTANTE!**

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{x-2}{x^3} = \frac{x^2+x-(x-2)}{x^3} = \frac{x^2 + \cancel{x} - \cancel{x} + 2}{x^3} = \frac{x^2+2}{x^3}$$

♥ Si capisce che il m.c.d.
costruito tramite questa regola
è la **più semplice espressione**
che possa essere poi
comodamente divisa per ciascuno
dei denominatori di partenza ...
proprio ciò di cui si ha bisogno
nel procedimento.

Analogamente all'esempio 3),
anche in questo numero 6)
il segno $-$ si riferisce a “**TUTTO**” il
polinomio $x-2$, che quindi va scritto
(o comunque pensato) tra parentesi.
Ciò si traduce in un **DOPPIO**
CAMBIAMENTO DI SEGNO

Quando i denominatori sono **POLINOMI**,
PRIMA DI TUTTO LI SI DEVE SCOMPORRE IN FATTORI!
il minimo comun denominatore si otterrà poi con una regola
del tutto analoga a quella sopra enunciata per i monomi.

$$7) \frac{a^2}{6a^3+18a^2+18a+6} + \frac{a+2}{4a^2+8a+4} =$$

$$= \frac{a^2}{6(a^3+3a^2+3a+1)} + \frac{a+2}{4(a^2+2a+1)} =$$

$$= \frac{a^2}{6(a+1)^3} + \frac{a+2}{4(a+1)^2} = \frac{2a^2+3(a+1)(a+2)}{12(a+1)^3} =$$

$$= \frac{2a^2+3(a^2+2a+a+2)}{12(a+1)^3} = \frac{2a^2+3a^2+6a+3a+6}{12(a+1)^3} = \frac{5a^2+9a+6}{12(a+1)^3}$$

APPROFONDIMENTO

Tutto il discorso delle frazioni
algebriche richiederebbe
riflessioni
ad un livello più avanzato
per tener conto del fatto che,
mentre nelle frazioni “ordinarie”
numeratore e denominatore
sono numeri interi, qui le lettere
possono assumere anche valori
frazionari o irrazionali.
Un'analisi paziente,
ma troppo “specialistica” per
poter rientrare in questo corso,
mostrerebbe che le regole da noi
enunciate sono effettivamente
valide anche in questo ambito
più generale.

$$\begin{aligned}
 8) \quad & \frac{x}{x^2-1} - \frac{x+1}{x^2-2x+1} + \frac{1}{x+1} = \frac{x}{(x+1)(x-1)} - \frac{x+1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+1} = \\
 & = \frac{x(x-1) - (x+1)^2 + (x-1)^2}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{\cancel{x^2} - \cancel{x} \cancel{x^2} - 2x \cancel{1} + x^2 - 2x \cancel{1}}{(x+1)(x-1)^2} = \\
 & = \frac{x^2 - 5x}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{x(x-5)}{(x+1)(x-1)^2}
 \end{aligned}$$

- 9) **IMPORTANTE!**
Qui ritroviamo la solita particolarità del segno – che si riferisce a **TUTTO** un polinomio.

$$\begin{aligned}
 & \frac{3b+4}{b-1} - \frac{4b+3}{b(b-1)} = \frac{b(3b+4) - (4b+3)}{b(b-1)} = \frac{3b^2 + \cancel{4b} - \cancel{4b} - 3}{b(b-1)} = \\
 & = \frac{3b^2 - 3}{b(b-1)} = \frac{3(b^2 - 1)}{b(b-1)} = \frac{3(b+1)\cancel{(b-1)}}{b\cancel{(b-1)}} = \frac{3(b+1)}{b}
 \end{aligned}$$

$$10) \quad \frac{x+4}{x+3} - \frac{x}{x+6} = \frac{(x+6)(x+4) - x(x+3)}{(x+3)(x+6)} = \frac{\cancel{x^2} + 4x + 6x + 24 - \cancel{x^2} - 3x}{(x+3)(x+6)} = \frac{7x+24}{(x+3)(x+6)}$$

$$\begin{aligned}
 11) \quad & \frac{a-b}{a+b} - \frac{a+b}{a-b} + \frac{4ab}{a^2-b^2} = \frac{a-b}{a+b} - \frac{a+b}{a-b} + \frac{4ab}{(a+b)(a-b)} = \\
 & = \frac{(a-b)^2 - (a+b)^2 + 4ab}{(a+b)(a-b)} = \frac{\cancel{a^2} - 2\cancel{ab} + \cancel{b^2} - \cancel{a^2} - 2\cancel{ab} - \cancel{b^2} + 4ab}{(a+b)(a-b)} = \frac{0}{(a+b)(a-b)} = 0
 \end{aligned}$$

- 12) **IMPORTANTE!**
Anche nell'espressione seguente compare la particolarità del segno – riferito ad un polinomio.

$$\begin{aligned}
 & \frac{x+3}{x^2-3x+2} - \frac{x+2}{x^2-4x+3} - \frac{1}{x^2-5x+6} = \\
 & = \frac{x+3}{(x-1)(x-2)} - \frac{x+2}{(x-1)(x-3)} - \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \\
 & = \frac{(x-3)(x+3) - (x-2)(x+2) - (x-1)}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \\
 & = \frac{\cancel{x^2} - 9 - \cancel{x^2} + 4 - x + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{-x-4}{(x-1)(x-2)(x-3)} = -\frac{x+4}{(x-1)(x-2)(x-3)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13) \quad & \frac{1}{4n^2-2n} + \frac{1}{n^3-2n^2+n} - \frac{1}{4n^3-6n^2+2n} = \frac{1}{2n(2n-1)} + \frac{1}{n(n^2-2n+1)} - \frac{1}{2n(2n^2-3n+1)} = \\
 & = \frac{1}{2n(2n-1)} + \frac{1}{n(n-1)^2} - \frac{1}{2n(2n^2-2n-n+1)} = \frac{1}{2n(2n-1)} + \frac{1}{n(n-1)^2} - \frac{1}{2n[2n(n-1)-(n-1)]} = \\
 & = \frac{1}{2n(2n-1)} + \frac{1}{n(n-1)^2} - \frac{1}{2n(n-1)(2n-1)} = \frac{(n-1)^2 + 2(2n-1) - (n-1)}{2n(2n-1)(n-1)^2} = \\
 & = \frac{n^2 - 2n \cancel{1} + 4n \cancel{2} - n \cancel{1}}{2n(2n-1)(n-1)^2} = \frac{n^2+n}{2n(2n-1)(n-1)^2} = \frac{\cancel{n}(n+1)}{2\cancel{n}(2n-1)(n-1)^2} = \frac{n+1}{2(2n-1)(n-1)^2}
 \end{aligned}$$

- 1) $\frac{a+b}{8} + \frac{a-b}{6}$ 2) $\frac{x+1}{4} - \frac{x}{6} + \frac{x-1}{2}$ 3) $4x - \frac{x+3}{3} + \frac{x+2}{2}$ 4) $\frac{n}{5} - \frac{n+3}{10}$
- 5) $\frac{x-1}{x^3} - \frac{5x^2+1}{6x^4} + \frac{3}{4x^2}$ 6) $\frac{a}{15c} + \frac{b+1}{10c^2}$ 7) $\frac{a+3}{a^2} - \frac{1}{a}$ 8) $\frac{3}{x} + \frac{2x+1}{x^2} - \frac{4x^2+x-1}{x^3}$
- 9) $\frac{5}{4ax} - \frac{a-1}{3a^2}$ 10) $\frac{1}{xy} + \frac{2}{x} + \frac{3}{y}$ 11) $\frac{a+b}{12a^2b^2} - \frac{a-b}{15a^3b} + \frac{2a}{b^4}$ 12) $\frac{x+1}{x} - \frac{x^2+x+1}{x^2}$
- 13) $\frac{2}{a^2b} - \frac{a-b}{ab^3} - \frac{a+b}{a^2b^2}$ 14) $\frac{1}{2t} - \frac{1-4t^2}{8t^3}$ 15) $\frac{a}{5} - \frac{2}{a}$ 16) $\frac{b}{2} + \frac{2}{b} + \frac{1}{2b} + 2b$
- 17) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 1$ 18) $k + \frac{1}{k}$ 19) $\frac{r+1}{r} - r - 1$ 20) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}$
- 21) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ 22) $\frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz}$ 23) $1 + \frac{a+b}{a}$ 24) $1 - \frac{a+b}{a}$
- 25) $\frac{y}{12x^2} - \frac{x^2+2y^2}{18xy^2}$ 26) $a+2 - \frac{4}{b}$ 27) $\frac{(a+b)^2}{4ab} - \frac{(a-b)^2}{4ab}$ 28) $a + \frac{2}{a} + \frac{3}{a^2}$
- 29) $\frac{1}{2a} + \frac{a+1}{2a^2} - \frac{a+2}{2a^3}$ 30) $\frac{2x+1}{4x} - \frac{3x-1}{6x}$ 31) $\frac{a+1}{a} + \frac{a-1}{a}$ 32) $\frac{a+1}{a} - \frac{a-1}{a}$
- 33) $a^{-1} + a^{-2} + a^{-3} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} = \dots$ 34) $(3x)^{-2} + 3x^{-2} = \frac{1}{(3x)^2} + 3 \cdot \frac{1}{x^2} = \dots$ 35) $a^2 + a + 1 + a^{-1} + a^{-2}$
- 36) $3c^{-3} - 2c^{-2}$ 37) $\frac{x-2}{3x^2-3} + \frac{x}{2x^2-4x+2}$ 38) $\frac{b^2}{b^2-6b+9} - \frac{b+1}{b-3}$ 39) $\frac{1}{2a+1} + \frac{1}{2a-1}$
- 40) $\frac{1}{x^5+3x^4+3x^3+x^2} - \frac{x-1}{x^6+2x^5+x^4}$ 41) $\frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y} + \frac{4xy}{x^2-y^2}$ 42) $\frac{5}{t+2} - \frac{t+1}{t^2+5t+6}$
- 43) $\frac{x+y}{6x-6y} - \frac{x^2+y^2}{4x^2+4y^2-8xy}$ 44) $\frac{1}{y+3} - \frac{2y-7}{y^2-9}$ 45) $\frac{a}{3a+2} + \frac{7a+2}{9a^2-4}$
- 46) $\frac{1}{2a^2-4a+2} - \frac{a+1}{a^3-a^2+2a-2}$ 47) $\frac{3}{q} + \frac{q}{q+1}$ 48) $\frac{6h}{3h+5} + \frac{10}{3h+5}$
- 49) $\frac{1}{(a+b+c)^3} - \frac{a-b+c}{(a+b+c)^4}$ 50) $\frac{a+b}{a-b} + 2$ 51) $\frac{a+b}{a-b} - 1$ 52) $\frac{2a+1}{a^2-3a+2} + \frac{a+2}{2a^2-3a+1}$
- 53) $\frac{a-x}{ax^2+x^3} + \frac{1}{a^2+2ax+x^2}$ 54) $\frac{y+4}{y^2-7y+12} - \frac{y-3}{y^2-16}$ 55) $\frac{x+y}{2x-2y} + \frac{x-y}{2x+2y}$
- 56) $\frac{x}{x^3+x^2+x+1} - \frac{1}{x^4+2x^2+1}$ 57) $\frac{1}{r+s+1} - \frac{1}{r+s}$ 58) $\frac{2}{w+3} - \frac{1}{w+2}$
- 59) $\frac{x+y}{x^2y+xy^2-12y^3} - \frac{x-3y}{x^2y+8xy^2+16y^3}$ 60) $\frac{2t^2}{(t+2)^3} - \frac{t}{(t+2)^2} - \frac{1}{t+2}$ 61) $\frac{1}{2t^2-5t+2} - \frac{1}{4t^2-1}$
- 62) $\frac{3}{x-y} + x+y$ 63) $a+7 - \frac{a^2}{a+7}$ 64) $-\frac{a+b-1}{a+b} + 1$ 65) $\frac{1-2c}{1-c} - \frac{2-c^2}{1-c^2} - 1$
- 66) $\frac{2a}{a^2-5a+6} - \frac{7a+6}{a^3-2a^2-9a+18} - \frac{a-2}{a^2-9}$ 67) $\frac{2}{n^2-3n+2} - \frac{n}{n^3-n^2-4n+4} - \frac{n}{n^4-5n^2+4}$
- 68) $\frac{5}{k^2-9k+18} - \frac{k-3}{k^2-6k} - \frac{10k^2-k^3-18}{k^4-9k^3+18k^2}$ 69) $\frac{1}{x^3-6x^2+11x-6} - \frac{1}{x^3+4x^2+x-6}$ *Scomposizioni con Ruffini*
- 70) $\frac{1}{a^3-a^2-a-2} - \frac{1}{a^3-1}$ *Ruffini* 71) $\frac{3y}{2y^3+7y^2+7y+2} - \frac{5}{4y^2+6y+2}$ *Ruffini*

RISULTATI

- 1) $\frac{7a-b}{24}$ 2) $\frac{7x-3}{12}$ 3) $\frac{25x}{6} = \frac{25}{6}x$ 4) $\frac{n-3}{10}$
- 5) $\frac{11x^2-12x-2}{12x^4}$ 6) $\frac{2ac+3b+3}{30c^2}$ 7) $\frac{3}{a^2}$ 8) $\frac{x^2+1}{x^3}$
- 9) $\frac{15a-4ax+4x}{12a^2x}$ 10) $\frac{1+2y+3x}{xy}$ 11) $\frac{120a^4+5a^2b^2+ab^3+4b^4}{60a^3b^4}$ 12) $-\frac{1}{x^2}$
- 13) $\frac{b^2-a^2}{a^2b^3}$ 14) $\frac{8t^2-1}{8t^3}$ 15) $\frac{a^2-10}{5a}$ 16) $\frac{5b^2+5}{2b}$
- 17) $\frac{x^2+y^2+xy}{xy}$ 18) $\frac{k^2+1}{k}$ 19) $\frac{1-r^2}{r}$ 20) $\frac{bcx+acy+abz}{abc}$
- 21) $\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$ 22) $\frac{x+y+z}{xyz}$ 23) $\frac{2a+b}{a}$ 24) $-\frac{b}{a}$
- 25) $\frac{3y^3-2x^3-4xy^2}{36x^2y^2}$ 26) $\frac{ab+2b-4}{b}$ 27) 1 28) $\frac{a^3+2a+3}{a^2}$
- 29) $\frac{a^2-1}{a^3}$ 30) $\frac{5}{12x}$ 31) 2 32) $\frac{2}{a}$
- 33) $\frac{a^2+a+1}{a^3}$ 34) $\frac{28}{9x^2}$ 35) $\frac{a^4+a^3+a^2+a+1}{a^2}$ 36) $\frac{3-2c}{c^3}$
- 37) $\frac{5x^2-3x+4}{6(x+1)(x-1)^2}$ 38) $\frac{2b+3}{(b-3)^2}$ 39) $\frac{4a}{(2a+1)(2a-1)}$ 40) $\frac{1}{x^4(x+1)^3}$
- 41) $\frac{2(x+y)}{x-y}$ 42) $\frac{4t+14}{(t+2)(t+3)}$ 43) $\frac{-x^2-5y^2}{12(x-y)^2} = -\frac{x^2+5y^2}{12(x-y)^2}$ 44) $\frac{4-y}{(y+3)(y-3)}$
- 45) $\frac{a+1}{3a-2}$ 46) $\frac{4-a^2}{2(a-1)^2(a^2+2)}$ 47) $\frac{q^2+3q+3}{q(q+1)}$ 48) 2
- 49) $\frac{2b}{(a+b+c)^4}$ 50) $\frac{3a-b}{a-b}$ 51) $\frac{2b}{a-b}$ 52) $\frac{5(a+1)}{(a-2)(2a-1)}$ 53) $\frac{a^2}{x^2(a+x)^2}$
- 54) $\frac{14y+7}{(y-3)(y-4)(y+4)}$ 55) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ 56) $\frac{x^3-1}{(x^2+1)^2(x+1)}$ 57) $-\frac{1}{(r+s+1)(r+s)}$
- 58) $\frac{w+1}{(w+2)(w+3)}$ 59) $\frac{11x-5y}{(x-3y)(x+4y)^2}$ 60) $-\frac{6t+4}{(t+2)^3}$ 61) $\frac{t+3}{(t-2)(2t-1)(2t+1)}$
- 62) $\frac{3+x^2-y^2}{x-y}$ 63) $\frac{14a+49}{a+7}$ 64) $\frac{1}{a+b}$ 65) $-\frac{2+c}{(1+c)(1-c)}$
- 66) $\frac{a+5}{(a+3)(a-3)}$ 67) $\frac{n+2}{(n-2)(n+1)(n-1)}$ 68) $\frac{1}{k^2}$ 69) $\frac{10x}{(x-1)(x-2)(x-3)(x+2)(x+3)}$
- 70) $\frac{1}{(a-1)(a-2)(a^2+a+1)}$ 71) $\frac{y-10}{2(y+1)(y+2)(2y+1)}$