6. QUANDO COMPAIONO POLINOMI OPPOSTI A DENOMINATORE

In questi casi, **prima di fare il denominatore comune**, converrà … **sbarazzarsi dei polinomi opposti!**

Esempio I $$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{b^2-a^2}+\frac{a}{(b-a)^3}=\boxed{\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b+a)(b-a)}+\frac{a}{(b-a)^3}}$$

A questo punto, non sarebbe assolutamente "astuto" fare subito il denominatore comune!
In tal modo, infatti, si andrebbe incontro a calcolacci pesantissimi …
Facciamo piuttosto in modo che non compaiano più coppie di polinomi opposti:
potremo scegliere di ricondurci dappertutto al blocco $(a-b)$, oppure, in alternativa, al blocco $(b-a)$.

1° modo: privilegiando il blocco $(a-b)$

$$\boxed{\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b+a)(b-a)}+\frac{a}{(b-a)^3}}=\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b+a)[-(a-b)]}+\frac{a}{[-(a-b)]^3}=$$
$$=\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{-(a+b)(a-b)}+\frac{a}{-(a-b)^3}=\boxed{\frac{1}{(a-b)^2}-\frac{1}{(a+b)(a-b)}-\frac{a}{(a-b)^3}}=\text{ecc. ecc.}$$

2° modo: privilegiando il blocco $(b-a)$

$$\boxed{\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b+a)(b-a)}+\frac{a}{(b-a)^3}}=\boxed{\underset{\text{NOTA}}{\frac{1}{(b-a)^2}}+\frac{1}{(b+a)(b-a)}+\frac{a}{(b-a)^3}}=\text{ecc. ecc.}$$

NOTA - Sappiamo (vedi il paragrafo sui polinomi opposti) che $(b-a)^2=(a-b)^2$:

$$(b-a)^2=[-(a-b)]^2=[-1\cdot(a-b)]^2=(-1)^2\cdot(a-b)^2=+1\cdot(a-b)^2=(a-b)^2$$

Nella pratica, i passaggi intermedi si possono saltare: tutto sta nel capire, in definitiva, se il segno davanti alla frazione debba essere cambiato oppure debba restare inalterato.

Esempio II

$$\boxed{\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a-2}+\frac{1}{a-3}-\frac{1}{(1-a)(2-a)}-\frac{1}{(1-a)(2-a)(3-a)}}=$$
$$=\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a-2}+\frac{1}{a-3}-\frac{1}{-(a-1)[-(a-2)]}-\frac{1}{-(a-1)[-(a-2)][-(a-3)]}=$$
$$=\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a-2}+\frac{1}{a-3}-\frac{1}{+(a-1)(a-2)}-\frac{1}{-(a-1)(a-2)(a-3)}=$$
$$=\boxed{\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a-2}+\frac{1}{a-3}-\frac{1}{(a-1)(a-2)}+\frac{1}{(a-1)(a-2)(a-3)}}=\text{ecc. ecc.}$$

Quest'ultimo esempio mostra che:

- ♥ **SE IN UN PRODOTTO SI CAMBIANO DI SEGNO 2 fattori (più in generale: UN NUMERO PARI DI FATTORI), IL PRODOTTO RESTA INVARIATO;**
- ♥ **SE IN UN PRODOTTO SI CAMBIANO DI SEGNO 3 fattori (o, più in generale, UN NUMERO DISPARI DI FATTORI: 1, 3, 5, 7 …), IL PRODOTTO CAMBIA DI SEGNO, per cui, PER SALVAGUARDARE L'UGUAGLIANZA, OCCORRERÀ SCRIVERE DAVANTI UN SEGNO "–"**

ESERCIZI

1) $\frac{x}{a-1}+\frac{y}{1-a}$ 2) $\frac{a}{2x-1}-\frac{b}{1-2x}$ 3) $\frac{1}{(x-3)^2}-\frac{1}{6-2x}$ 4) $\frac{1}{(x-1)^5}+\frac{1}{(1-x)^4}+\frac{1}{(1-x)^3}$

5) $\frac{3}{x^2-3x+2}-\frac{2}{2x-x^2}+\frac{1}{x-x^2}$ 6) $\frac{x}{(a-1)(a-2)(a-3)}+\frac{y}{(a-1)(a-2)(3-a)}+\frac{z}{(a-1)(2-a)(3-a)}+\frac{w}{(1-a)(2-a)(3-a)}$

RISULTATI

1) $\frac{x-y}{a-1}$ *opp.* $\frac{y-x}{1-a}$ 2) $\frac{a+b}{2x-1}, -\frac{a+b}{1-2x}$ 3) $\frac{x-1}{2(x-3)^2}, \frac{x-1}{2(3-x)^2}$ 4) $\frac{-x^2+3x-1}{(x-1)^5}, \frac{x^2-3x+1}{(1-x)^5}$

5) $\frac{4}{(x-1)(x-2)}$ 6) $\frac{x-y+z-w}{(a-1)(a-2)(a-3)}$

♥ Utile osservare che **una frazione resta invariata se si cambiano i segni sia del numeratore che del denominatore**