7. FRAZIONI ALGEBRICHE: LE CONDIZIONI DI ESISTENZA

Per non appesantire troppo l'argomento, abbiamo posticipato fino a questo punto una questione che comunque va trattata.

Ben sappiamo che in una frazione il denominatore "deve essere diverso da 0", in quanto **la divisione per 0 è una operazione "non eseguibile".**

Ricordiamone brevemente il motivo.

La divisione, in matematica, è intesa come l'operazione inversa della moltiplicazione.
Il motivo per cui, ad esempio, si ha $28:4=7$,
è che il 7, se venisse moltiplicato per 4, restituirebbe il 28: $7\cdot 4=28$.

Insomma, $\boxed{a:b=c \leftrightarrow c\cdot b=a}$.

Consideriamo ora l'operazione $5:0$.
$5:0=?$
Dovremmo trovare un numero che moltiplicato per 0 dia 5 … ma non lo troveremo mai!
Un numero siffatto non esiste, perché qualsiasi numero, moltiplicato per 0, dà sempre e soltanto 0.
Allora l'operazione $5:0$ è IMPOSSIBILE, è priva di risultato; non c'è nessun numero che possa "pretendere di esserne il risultato".
Ovviamente, lo stesso ragionamento varrebbe se al posto del 5 considerassimo il 4, o il 37,238 oppure il -72.

L'operazione particolarissima $0:0$ si comporta invece in modo profondamente diverso.
Essa ci chiede di trovare un numero che moltiplicato per 0 (il *secondo* 0) dia 0 (il *primo* 0).
Sennonché, questa volta, *qualsiasi* numero andrebbe bene, *qualsiasi* numero potrebbe "pretendere di essere il risultato" di questa operazione, perché *qualsiasi* numero moltiplicato per 0 in effetti dà 0.
Se viene da me il numero 15, lui può dirmi: "il risultato dell'operazione $0:0$ sono io! Infatti, $15\cdot 0=0$".
Ma anche il numero 9 può avere questa pretesa, di andar bene come risultato dell'operazione $0:0$, perché $9\cdot 0=0$; e pure i numeri $3/5$; $29{,}71$; $-8{,}3$; ecc. ecc. ecc. sarebbero adeguati come risultati.
Questa volta ci troviamo di fronte a … problemi di "abbondanza".
L'operazione è INDETERMINATA, vale a dire:
non ha un risultato ben determinato, ma potrebbe averne infiniti,
dato che qualunque numero avrebbe i requisiti per esserne il risultato.

Ricapitolando, le due operazioni
- ♪ $(\textit{numero diverso da } 0):0$
- ♫ $0:0$

sarebbero, rispettivamente,
- ♪ IMPOSSIBILE (= nessun risultato)
- ♫ e INDETERMINATA (= infiniti risultati);

per cui non si tratta di "vere" operazioni:
la comunità matematica le considera come operazioni "non eseguibili", "*illegal* operations" ("illegal" da tradurre come "illecite").

Osserviamo, infine, che se lo 0, in una divisione, comparisse esclusivamente a *dividendo*, l'operazione sarebbe normalissima e avrebbe 0 come risultato:
$0:4=0$ (infatti $\underbrace{0}_{\substack{risul-\\tato}} \cdot \underbrace{4}_{\substack{divi-\\ore}} = \underbrace{0}_{\substack{divi-\\dendo}}$).

Tutto ciò, insieme col fatto che una frazione $\frac{p}{q}$ equivale sostanzialmente alla divisione $p:q$,

ci porta all'importantissimo specchietto seguente ♥ :

$(\textit{numero diverso da } 0):0$,	$\dfrac{\textit{numero diverso da } 0}{0}$	*operazione*	**IMPOSSIBILE**	*operazioni* **"non eseguibili"**
$0:0$,	$\dfrac{0}{0}$	*operazione*	**INDETERMINATA**	
$0:(\textit{numero diverso da } 0)$,	$\dfrac{0}{\textit{numero diverso da } 0}$	*operazione*	**NORMALE** (*con risultato* 0)	

Di fronte a un'espressione contenente frazioni con lettere a denominatore, dobbiamo allora tenere presente che la medesima *non* ha significato per *qualsiasi* valore delle lettere coinvolte,
ma solo per quei valori delle lettere che rendono *tutti i suoi denominatori diversi da* 0.

- Facciamo un esempio. Consideriamo l'espressione $\frac{a-1}{a-2}+\frac{a+3}{a+4}+\frac{1}{5a+6}$.

  Per quali valori della lettera a esisterà (= sarà definita, avrà significato)?

  Beh, esisterà per i valori di a tali che sia $\begin{cases} a-2\neq 0 \\ a+4\neq 0 \\ 5a+6\neq 0 \end{cases}$, ossia per $\begin{cases} a\neq 2 \\ a\neq -4 \\ a\neq -6/5 \end{cases}$

  Osserviamo che queste CONDIZIONI DI ESISTENZA, contenenti il simbolo "$\neq$" (= "diverso da"), si "trattano" in modo del tutto simile alle equazioni, semplicemente conservando sempre il simbolo "$\neq$" al posto del simbolo "$=$". Ad esempio:

  $5a+6\neq 0$
  $5a\neq -6$ (*trasporto, cambiando di segno*)
  $a\neq -\frac{6}{5}$ (*divido per* 5)

- Un altro esempio. Quali sono le condizioni di esistenza (C.E.) dell'espressione $\frac{b+1}{2b}+\frac{1}{b+2}+\frac{b-1}{(2b-1)^2}$?

  CONDIZIONI DI ESISTENZA (C.E.):

  $\begin{cases} 2b\neq 0 \\ b+2\neq 0 \\ (2b-1)^2\neq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} b\neq 0 \text{ (dividendo per 2)} \\ b\neq -2 \text{ (trasportando)} \\ 2b-1\neq 0 \text{ (un quadrato è} \neq \text{da 0 se e solo se lo è la sua base); } 2b\neq 1;\ b\neq 1/2 \end{cases}$

- Ancora: quali sono le condizioni di esistenza (C.E.) dell'espressione $\frac{1}{c-3d}+\frac{1}{c+d-1}$?

  CONDIZIONI DI ESISTENZA (C.E.):

  $\begin{cases} c-3d\neq 0 \\ c+d-1\neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} c\neq 3d \\ c\neq -d+1 \end{cases}$

  (Di norma, quando in una condizione sono presenti due lettere, se ne isola una a scelta. Noi, in particolare, abbiamo desunto che, affinché l'espressione abbia significato, c deve essere diversa sia dal triplo di d, sia dall'opposto di d aumentato di 1. Ad esempio, nel nostro caso, la coppia $c=12,\ d=4$, nella quale c è il triplo di d, renderebbe priva di significato l'espressione in esame).

- Terminiamo questa rassegna di esempi con: $\frac{1}{10x^2-90}+\frac{1}{x^3-x^2-6x}$

  Qui, per capire "da cosa deve essere diversa x", *scomponiamo innanzitutto in fattori*!
  Ogni fattore così ottenuto dovrà essere diverso da 0, affinché non si annulli nessun denominatore …

  $$\frac{1}{10x^2-90}+\frac{1}{x^3-x^2-6x}=\frac{1}{10(x^2-9)}+\frac{1}{x(x^2-x-6)}=\frac{1}{10(x+3)(x-3)}+\frac{1}{x(x-3)(x+2)}$$

  Quindi, C.E.: $\begin{cases} x+3\neq 0,\ x\neq -3 \\ x-3\neq 0,\ x\neq 3 \\ x\neq 0 \\ x+2\neq 0,\ x\neq -2 \end{cases}$ (*brevemente*: $x\neq\pm 3,\ x\neq 0,\ x\neq -2$)

  Osserviamo che il fattore costante 10 non viene in alcun modo coinvolto, non contenendo la lettera ed essendo $\neq 0$ "per sua natura".

ESERCIZI Scrivi le condizioni di esistenza delle frazioni algebriche che seguono.

1) $\frac{a+1}{a-1}+\frac{a-2}{a+2}$ 2) $\frac{b-3}{4b}+\frac{2}{b+5}$ 3) $\frac{x}{3x-1}+\frac{x-4}{2x+5}$ 4) $\frac{x}{x^2-4}+\frac{x-1}{2x+6}$ 5) $\frac{q}{p}+\frac{p-1}{3q-2}$ 6) $\frac{y-1}{2}-\frac{y+1}{3y}$

7) $\frac{w+3}{3w^2}+\frac{2}{5(w-1)^3}$ 8) $\frac{1}{a^2-a-12}-2\cdot\frac{a+5}{a^2-a}$ 9) $\frac{a-b}{a-2b}+\frac{a}{a-3b-1}$ 10) $\frac{x-3}{xy}+\frac{y}{4x-y-1}$ 11) $\frac{x-2y}{(4x+y)^2}$

RISPOSTE 1) $\begin{cases} a\neq 1 \\ a\neq -2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} b\neq 0 \\ b\neq -5 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x\neq 1/3 \\ x\neq -5/2 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x\neq \pm 2 \\ x\neq -3 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} p\neq 0 \\ q\neq 2/3 \end{cases}$ 6) $y\neq 0$ 7) $\begin{cases} w\neq 0 \\ w\neq 1 \end{cases}$

8) $a\neq 4,\ a\neq -3,\ a\neq 0,\ a\neq 1$ 9) $\begin{cases} a\neq 2b \\ a\neq 3b+1 \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x\neq 0 \\ y\neq 0 \\ y\neq 4x-1 \text{ oppure: } x\neq \frac{y+1}{4} \end{cases}$ 11) $y\neq -4x$ *oppure* $x\neq -\frac{y}{4}$