

## 8. ESPRESSIONI CON TUTTE LE OPERAZIONI: ESEMPI SVOLTI

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \left( \frac{x+2}{x^2-2x} + \frac{1}{x^2-4} \right) \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+4} \right) = \\
 & = \left[ \frac{x+2}{x(x-2)} + \frac{1}{(x+2)(x-2)} \right] \cdot \frac{\cancel{x}+4-\cancel{x}-1}{(x+1)(x+4)} = \\
 & = \frac{(x+2)^2+x}{x(x+2)(x-2)} \cdot \frac{3}{(x+1)(x+4)} = \\
 & = \frac{x^2+4x+4+x}{x(x+2)(x-2)} \cdot \frac{3}{(x+1)(x+4)} = \\
 & = \frac{x^2+5x+4}{x(x+2)(x-2)} \cdot \frac{3}{(x+1)(x+4)} = \\
 & = \frac{(x+1)\cancel{(x+4)}}{x(x+2)(x-2)} \cdot \frac{3}{\cancel{(x+1)}\cancel{(x+4)}} = \\
 & = \frac{3}{x(x+2)(x-2)}
 \end{aligned}$$

## SUGGERIMENTI PREZIOSI:

- ♥ **Ordine! Scrivi bene!**
  - ♥ **Rileggi dopo ogni passaggio!**
  - ♥ **Prima di ogni passaggio, domandati:**  
 “cosa devo fare,  
 cosa mi conviene fare  
 a questo punto?”
- RICORDA:**
- ♥ **Il simbolo “=” che chiude una riga deve essere poi riscritto anche all’inizio della riga successiva**
  - ♥ **Quando si fa il denominatore comune, ottenendo così un’unica linea di frazione, è inutile (anche se non sarebbe sbagliato) mettere questa frazione fra parentesi (a meno che, naturalmente, la frazione sia poi da elevare a potenza)**

$$\begin{aligned}
 2) \quad & \left( \frac{x+5}{x-2} - 1 \right) : \left( \frac{1}{x^2-7x+10} - \frac{1}{x^2-25} \right) + 25 = \\
 & = \frac{\cancel{x}+5-\cancel{x}+2}{x-2} : \left[ \frac{1}{(x-2)(x-5)} - \frac{1}{(x+5)(x-5)} \right] + 25 = \\
 & = \frac{7}{x-2} : \frac{\cancel{x}+5-\cancel{x}+2}{(x-2)(x-5)(x+5)} + 25 = \frac{7}{x-2} : \frac{7}{(x-2)(x-5)(x+5)} + 25 = \\
 & = \frac{\cancel{7}}{\cancel{x-2}} \cdot \frac{\cancel{(x-2)}(x-5)(x+5)}{\cancel{7}} + 25 = x^2 - \cancel{25} + \cancel{25} = x^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad & \left( \frac{a+x}{a-x} - \frac{a-x}{a+x} \right) \cdot \left( \frac{a}{4x} + \frac{x}{4a} + \frac{1}{2} \right) = \frac{(a+x)^2 - (a-x)^2}{(a-x)(a+x)} \cdot \frac{a^2+x^2+2ax}{4ax} = \\
 & = \frac{\cancel{a}^2+2ax-\cancel{x}^2-\cancel{a}^2+2ax-\cancel{x}^2}{(a-x)(a+x)} \cdot \frac{(a+x)^2}{4ax} = \frac{\cancel{4ax}}{(a-x)(\cancel{a+x})} \cdot \frac{(a+x)^{\cancel{2}}}{\cancel{4ax}} = \frac{a+x}{a-x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad & \frac{12}{4a^2-9} \cdot \left( \frac{a}{3a+3} - \frac{1}{2a+2} \right) = \frac{12}{(2a+3)(2a-3)} \cdot \left[ \frac{a}{3(a+1)} - \frac{1}{2(a+1)} \right] = \\
 & = \frac{\cancel{12}^2}{(2a+3)(\cancel{2a-3})} \cdot \frac{\cancel{2a-3}}{\cancel{6}(a+1)} = \frac{2}{(2a+3)(a+1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad & \left( \frac{1}{a^2+5a+6} + \frac{1}{a^2+7a+12} \right) \cdot \frac{a^2+6a+8}{2} = \left[ \frac{1}{(a+2)(a+3)} + \frac{1}{(a+3)(a+4)} \right] \cdot \frac{(a+2)(a+4)}{2} = \\
 & = \frac{a+4+a+2}{(a+2)(a+3)(a+4)} \cdot \frac{(a+2)\cancel{(a+4)}}{2} = \frac{2a+6}{2(a+3)} = \frac{2\cancel{(a+3)}}{2\cancel{(a+3)}} = 1
 \end{aligned}$$



Ti ricordo la  
**IMPORTANTISSIMA  
 RACCOMANDAZIONE**  
 fatta a pag. 244:

**IN UNA FRAZIONE,**  
 sarebbe  
 errore madornale  
 semplificare  
 addendo con addendo  
 oppure  
 addendo con fattore:

**SI PUO' SOLO  
 SEMPLIFICARE  
 FATTORE  
 CON  
 FATTORE.**

$$6) \left( \frac{a+1}{a^2-a} - \frac{a}{a^2-1} \right) \cdot \frac{2a+2}{2a+1} = \left[ \frac{a+1}{a(a-1)} - \frac{a}{(a+1)(a-1)} \right] \cdot \frac{2(a+1)}{2a+1} =$$

$$= \frac{(a+1)^2 - a^2}{a(a-1)(a+1)} \cdot \frac{2(a+1)}{2a+1} = \frac{a^2 + 2a + 1 - a^2}{a(a-1)} \cdot \frac{2}{2a+1} = \frac{2a+1}{a(a-1)} \cdot \frac{2}{2a+1} = \frac{2}{a(a-1)}$$

$$7) \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) \cdot \frac{x^5 + x^3}{x^4 - 1} \cdot (x-1) = \frac{x+1}{x^3} \cdot \frac{x^3(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2-1)} \cdot (x-1) = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} \cdot (x-1) = 1$$

$$8) \left( \frac{1}{b^2+2b} + 2 \cdot \frac{1}{b^3-2b^2} \right) : \frac{b^2+4}{b^2-4} = \left[ \frac{1}{b(b+2)} + \frac{2}{b^2(b-2)} \right] : \frac{b^2+4}{(b+2)(b-2)} =$$

$$= \frac{b(b-2) + 2(b+2)}{b^2(b+2)(b-2)} \cdot \frac{(b+2)(b-2)}{b^2+4} = \frac{b^2 - 2b + 2b + 4}{b^2(b^2+4)} = \frac{b^2+4}{b^2(b^2+4)} = \frac{1}{b^2}$$

$$9) \left( \frac{a-b}{a-2b} - \frac{a+2b}{a+b} \right) (a^2 - 3ab + 2b^2) = \frac{a^2 - b^2 - a^2 + 4b^2}{(a-2b)(a+b)} \cdot (a-b)(a-2b) = \frac{3b^2(a-b)}{a+b}$$

$$10) \frac{\frac{a-b}{b} - \frac{a}{a+b}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} + b = \frac{\frac{a^2-b^2}{ab}}{\frac{b+a}{ab}} + b = \frac{(a+b)(a-b)}{ab} \cdot \frac{ab}{b+a} + b = a \cancel{b} \cancel{b} = a$$

$$11) \frac{\frac{a+b}{a-b} + 1}{\frac{a+b}{a-b} - 1} - \frac{a}{b} = \frac{\frac{a+b+a-b}{a-b}}{\frac{a+b-a-b}{a-b}} - \frac{a}{b} = \frac{2a}{2b} - \frac{a}{b} = \frac{2a}{2b} - \frac{a-b}{2b} - \frac{a}{b} = \frac{a-b}{2b} - \frac{a}{b} = \frac{a-b-2a}{2b} = \frac{-a-b}{2b} = 0$$

$$12) (y+2)^2 \cdot \frac{\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y+2}}{\frac{1}{y+1} + \frac{1}{y+3}} = (y+2)^2 \cdot \frac{\frac{y+2-y-1}{(y+1)(y+2)}}{\frac{y+3+y+1}{(y+1)(y+3)}} = (y+2)^2 \cdot \frac{1}{(y+1)(y+2)} \cdot \frac{(y+1)(y+3)}{2y+4} =$$

$$= \frac{(y+2)^2}{(y+1)(y+2)} \cdot \frac{(y+1)(y+3)}{2(y+2)} = \frac{y+3}{2}$$

$$13) \frac{1 - \frac{13}{x^2} + \frac{36}{x^4}}{x^2 - 5x + 6} = \frac{\frac{x^4 - 13x^2 + 36}{x^4}}{(x-2)(x-3)} = \frac{(x^2-4)(x^2-9)}{x^4} \cdot \frac{1}{(x-2)(x-3)} =$$

$$= \frac{(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)}{x^4} \cdot \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{(x+2)(x+3)}{x^4}$$

♥ Nell'esercizio qui a fianco e nel successivo, occhio alle modalità dei "capovolgimenti"!

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{1}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c}$$

$$14) \frac{1 + \frac{y}{x}}{x-y} - \frac{1 - \frac{y}{x}}{x+y} = \frac{\frac{x+y}{x}}{x-y} - \frac{\frac{x-y}{x}}{x+y} = \frac{x+y}{x} \cdot \frac{1}{x-y} - \frac{x-y}{x} \cdot \frac{1}{x+y} = \frac{x+y}{x(x-y)} - \frac{x-y}{x(x+y)} =$$

$$= \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{x(x+y)(x-y)} = \frac{x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2}{x(x+y)(x-y)} = \frac{4xy}{x(x+y)(x-y)} = \frac{4y}{(x+y)(x-y)}$$

- Le seguenti tre espressioni presentano somme algebriche di frazioni algebriche, con **polinomi opposti a denominatore**.

In casi di questo genere, è sempre conveniente,

**prima di fare il denominatore comune, sbarazzarsi dei fastidiosi polinomi opposti,** facendo in modo che compaia dappertutto sempre lo stesso polinomio.

$$\begin{aligned}
 15) \quad & \frac{a^2}{(a-2)^3} + \frac{1}{2-a} + \frac{1}{(2-a)^4} = \\
 & = \frac{a^2}{(a-2)^3} + \frac{1}{-(a-2)} + \frac{1}{(a-2)^4} = \\
 & \quad \text{NOTA} \\
 & = \frac{a^2}{(a-2)^3} - \frac{1}{a-2} + \frac{1}{(a-2)^4} = \\
 & = \frac{a^2(a-2) - (a-2)^3 + 1}{(a-2)^4} = \\
 & = \frac{a^3 - 2a^2 - (a^3 - 6a^2 + 12a - 8) + 1}{(a-2)^4} = \\
 & = \frac{\cancel{a^3} - 2a^2 - \cancel{a^3} + 6a^2 - 12a + 8 + 1}{(a-2)^4} = \\
 & = \frac{4a^2 - 12a + 9}{(a-2)^4} = \frac{(2a-3)^2}{(a-2)^4}
 \end{aligned}$$

NOTA

Sappiamo che

$$(2-a)^4 = (a-2)^4$$

per via dell'esponente pari:

due numeri opposti,

se elevati allo stesso esponente PARI, danno risultati uguali;

d'altronde,

$$(2-a)^4 = [-(a-2)]^4 = +(a-2)^4$$

$$\begin{aligned}
 16) \quad & \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} = \\
 & = \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{-(a-b)(b-c)} + \frac{1}{-(a-c) \cdot [-(b-c)]} = \\
 & = \frac{1}{(a-b)(a-c)} - \frac{1}{(a-b)(b-c)} + \frac{1}{(a-c)(b-c)} = \\
 & = \frac{\cancel{b} - \cancel{c} - \cancel{a} + \cancel{c} + \cancel{a} - \cancel{b}}{(a-b)(a-c)(b-c)} = \frac{0}{(a-b)(a-c)(b-c)} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 17) \quad & \left[ \frac{3}{x^2-1} + \frac{x}{(1-x)^3} \right] \cdot \frac{1}{2x-1} = \left[ \frac{3}{(x+1)(x-1)} + \frac{x}{-(x-1)^3} \right] \cdot \frac{1}{2x-1} = \\
 & = \left[ \frac{3}{(x+1)(x-1)} - \frac{x}{(x-1)^3} \right] \cdot \frac{1}{2x-1} = \frac{3(x-1)^2 - x(x+1)}{(x+1)(x-1)^3} \cdot \frac{1}{2x-1} = \\
 & = \frac{3x^2 - 6x + 3 - x^2 - x}{(x+1)(x-1)^3} \cdot \frac{1}{2x-1} = \frac{2x^2 - 7x + 3}{(x+1)(x-1)^3} \cdot \frac{1}{2x-1} = \\
 & = \frac{2x^2 - 6x - x + 3}{(x+1)(x-1)^3} \cdot \frac{1}{2x-1} = \frac{2x(x-3) - (x-3)}{(x+1)(x-1)^3} \cdot \frac{1}{2x-1} = \\
 & = \frac{(x-3)(\cancel{2x-1})}{(x+1)(x-1)^3} \cdot \frac{1}{\cancel{2x-1}} = \frac{x-3}{(x+1)(x-1)^3}
 \end{aligned}$$

□ Nella seguente espressione compare una **semplificazione fra polinomi opposti**.

$$18) \quad \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}\right)}{1-\frac{3}{x}}(9-x^2) = \frac{\cancel{x} \cdot \cancel{x+1} \cdot \frac{x+2}{x}}{\frac{x-3}{x}}(3+x)(3-x) =$$

$$= \frac{(x+1)(x+2)}{\cancel{x}} \cdot \frac{\cancel{x}}{\cancel{x-3}} \cdot (3+x)(3-x) = -(x+1)(x+2)(x+3)$$

□ Nell'esempio che segue è necessario, per fattorizzare un polinomio, applicare il **metodo di Ruffini**. La scomposizione, in questi casi, va fatta a parte e successivamente reinserita nell'espressione.

$$19) \quad \left(\frac{1}{2x^3+x^2-5x+2} - \frac{1}{x^2+x-2}\right)\left(\frac{1}{2} - 2x^2\right) =$$

$$= \left[\frac{1}{(x-1)(x+2)(2x-1)} - \frac{1}{(x-1)(x+2)}\right] \cdot \frac{1-4x^2}{2} =$$

$$= \frac{1-2x+1}{(x-1)(x+2)(2x-1)} \cdot \frac{(1+2x)(1-2x)}{2} =$$

$$= \frac{2-2x}{(x-1)(x+2)(2x-1)} \cdot \frac{(1+2x)(1-2x)}{2} =$$

$$= \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{1-x}}{(x-1)(x+2)(2x-1)} \cdot \frac{(1+2x)(\cancel{1-2x})}{\cancel{2}} = \frac{2x+1}{x+2}$$

$$2x^3 + x^2 - 5x + 2$$

Divisori del termine noto :  $\pm 1, \pm 2$

Divisori del 1° coeff. :  $\pm 1, \pm 2$

Possibili zeri razionali :  $\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}$

$$P(1) = 2 + 1 - 5 + 2 = 0, \text{ OK}$$

$$\begin{array}{r|rrrr|r} 2 & 2 & 1 & -5 & 2 & \\ 1 & & 2 & 3 & -2 & \\ \hline & 2 & 3 & -2 & 0 & \end{array}$$

$$2x^3 + x^2 - 5x + 2 =$$

$$= (x-1)(2x^2 + 3x - 2) =$$

$$= (x-1)(2x^2 + 4x - x - 2) =$$

$$= (x-1)[2x(x+2) - (x+2)] =$$

$$= (x-1)(x+2)(2x-1)$$

□ E terminiamo la rassegna di esempi con due espressioni che contengono **potenze**.

$$20) \quad \left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)^2 (x^2-4)^3 = \left(\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x-2}{x}}\right)^2 (x+2)^3 (x-2)^3 =$$

$$= \left(\frac{x-1}{\cancel{x}} \cdot \frac{\cancel{x}}{x-2}\right)^2 (x+2)^3 (x-2)^3 =$$

$$= \left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2 (x+2)^3 (x-2)^3 =$$

$$= \frac{(x-1)^2}{\cancel{(x-2)^2}} (x+2)^3 (x-2)^{\cancel{2}} = (x-1)^2 (x+2)^3 (x-2)$$

$$21) \quad \left(\frac{1}{3a} - \frac{a+1}{2a} + 1\right) \cdot \frac{6a^{-1}}{9-a^{-2}} =$$

$$= \frac{2-3(a+1)+6a}{6a} \cdot \frac{6 \cdot \frac{1}{a}}{9-\frac{1}{a^2}} =$$

$$= \frac{2-3a-3+6a}{6a} \cdot \frac{\frac{6}{a}}{\frac{9a^2-1}{a^2}} =$$

$$= \frac{\cancel{3a-1}}{\cancel{6} \cdot \cancel{a}} \cdot \frac{\cancel{6} \cdot \cancel{a^2}}{\cancel{a} \cdot (3a+1)(3a-1)} = \frac{1}{3a+1}$$

Dal sito  
[www.themathpage.com](http://www.themathpage.com)  
di  
Lawrence Spector

Example

$$\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x}$$

Solution.

These denominators have no common factors.

Therefore, the LCM of denominators is their product.

$$\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{2x-(x-1)}{x(x-1)} = \frac{2x-x+1}{x(x-1)} = \frac{x+1}{x(x-1)}$$

[LCM = Lowest Common Multiple]

Note:

The entire  $x-1$  is being subtracted. Therefore, we write it in parentheses, and its signs change.