10. IDENTITA' CON FRAZIONI ALGEBRICHE (risposte a pag. 269)

1) Verifica che, qualunque sia il numero a, diverso da 0, $+1$, -1, sussiste la relazione

$$\frac{1}{a}=\frac{\frac{1}{a-1}}{1+\frac{1}{a-1}}=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a+1}$$

2) Verifica che vale l'identità $\left(1-\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{a}{b}\right)^{-1}=-\left(1-\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{b}{a}\right)^{-1}$

3) La somma dei reciproci di due numeri non nulli qualsiasi è sempre uguale al rapporto fra la loro somma e il loro prodotto. Rappresenta questo enunciato con una formula, e dimostrane la validità.

4) Dimostra che se si prendono tre interi consecutivi e si divide il loro prodotto per la loro somma, il risultato è uguale alla terza parte del prodotto fra il più piccolo e il più grande.

5) Dopo aver controllato che valgono le uguaglianze

$$\frac{4\cdot 1}{2\cdot 3}=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)$$
$$\frac{5\cdot 2}{3\cdot 4}=\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)$$
$$\frac{6\cdot 3}{4\cdot 5}=\left(1-\frac{1}{16}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right)$$
...

scrivi l'uguaglianza generale che sembra potersi ricavare dalla sequenza, e dimostra che è valida sempre.

6)
$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1+1}=\frac{1}{1\cdot(1+1)}+\frac{2}{1+1}$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2+1}=\frac{1}{2\cdot(2+1)}+\frac{2}{2+1}$$
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3+1}=\frac{1}{3\cdot(3+1)}+\frac{2}{3+1}$$
...

Scrivi l'uguaglianza generale che si può ipotizzare dalla sequenza, e dimostra che è valida sempre.

7) Verifica l'identità $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}=\frac{3}{n+1}+\frac{2}{n(n+1)(n+2)}$.
Cosa diventa se facciamo la sostituzione $n\to n-1$?

8) Verifica l'identità $\frac{ab}{(a+1)(b+1)}=\left(1-\frac{1}{a+1}\right)\left(1-\frac{1}{b+1}\right)$ e riscrivila nel caso particolare $b=a$.

9) University of New Brunswick - Junior High School Mathematics Competition 1990

I) Determina il valore del prodotto delle frazioni seguenti: $\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}\cdot\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}-\frac{1}{6}}\cdot\frac{\frac{1}{6}-\frac{1}{7}}{\frac{1}{7}-\frac{1}{8}}\cdot\,........\,\cdot\frac{\frac{1}{98}-\frac{1}{99}}{\frac{1}{99}-\frac{1}{100}}$

a) 1/2 b) 2 c) 0.02 d) 50 e) 1/100

II) In generale, quanto vale l'n-esima frazione in gioco, fra quelle moltiplicate?
III) Se le frazioni moltiplicate sono n, quanto vale il loro prodotto?

10) University of New Brunswick - Junior High School Mathematics Competition 1990

You are told that certain unknown positive integers p, q, r, s satisfy $\frac{p}{q}=\frac{r}{s}$.

Which of the following statements must be true?

a) $\frac{p}{s}=\frac{r}{q}$ b) $\frac{p}{r}=\frac{s}{q}$ c) $\frac{p}{q}=\frac{p+r}{q+s}$ d) $\frac{r}{s}$ *doesn't equal* $\frac{r-p}{s-q}$ e) None of a), b), c), d)

11) Per ultimare un determinato lavoro in 1 giorno ci vogliono a apprendisti, o in alternativa e lavoratori esperti.
In quanti giorni porterebbe a termine quel lavoro una coppia formata da 1 apprendista e 1 esperto?
a) $\frac{1}{a+e}$ b) $\frac{1}{ae}$ c) $\frac{a+e}{ae}$ d) $\frac{ae}{a+e}$

12) **Considera le seguenti frazioni algebriche e stabilisci per quali valori di x ciascuna di esse risulta**
(1) non definita, in quanto corrisponderebbe ad una operazione impossibile
(2) non definita, in quanto corrisponderebbe ad una operazione indeterminata
(3) uguale a 0

	(1): imposs.	(2): indet.	(3): uguale a 0
$\frac{x+12}{x-21}$	$x=21$	/	$x=-12$
$\frac{4x-2}{2x-1}$			
$\frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-7x+12}$			
$\frac{3x+1}{3x}$			
$\frac{3x}{3x+1}$			
$\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$			
$\frac{9x+27}{x^2+6x+9}$			

RIPASSO $(a \neq 0)$:
$\frac{a}{0}$ **IMPOSS.**
$\frac{0}{0}$ **INDET.**
"***illegal operations***"
$\frac{0}{a} = 0$ ***operazione normalissima***
Frazione = divisione, e divisione = operazione inversa della moltiplicazione
$\mathbf{a : b = c \Leftrightarrow c \cdot b = a}$
$1:0,\ 1/0$ è IMPOSSIBILE perché *non c'è alcun numero* che moltiplicato per 0 dia 1
$0:0,\ 0/0$ è INDETERMINATA perché *qualsiasi numero* moltiplicato per 0 dà 0

13) C'è qualche piccola differenza fra le due espressioni algebriche $\frac{1}{1+\frac{2}{x-4}}$ e $\frac{x-4}{x-2}$?

14) **Sarà mai possibile esprimere la frazione algebrica $\mathbf{\frac{5x-41}{(x+3)(x-5)}}$ come somma algebrica di due frazioni aventi a denominatore rispettivamente $\mathbf{x+3}$ e $\mathbf{x-5}$, e a numeratore due numeri?**
Vediamo.

$$\frac{5x-41}{(x+3)(x-5)} = \frac{\text{A}}{x+3} + \frac{\text{B}}{x-5}$$
$$\frac{5x-41}{(x+3)(x-5)} = \frac{\text{A}(x-5)+\text{B}(x+3)}{(x+3)(x-5)}$$
$$\frac{5x-41}{(x+3)(x-5)} = \frac{\text{A}x-5\text{A}+\text{B}x+3\text{B}}{(x+3)(x-5)}$$
$$\frac{5x-41}{(x+3)(x-5)} = \frac{\text{A}x+\text{B}x-5\text{A}+3\text{B}}{(x+3)(x-5)}$$
$$\frac{5x-41}{(x+3)(x-5)} = \frac{(\text{A}+\text{B})\,x+(-5\text{A}+3\text{B})}{(x+3)(x-5)}$$

Affinché l'ultima uguaglianza sia una identità occorre e basta che sia $\begin{cases}\text{A}+\text{B}=5\\ -5\text{A}+3\text{B}=-41\end{cases}$ da cui $\begin{cases}\text{A}=7\\ \text{B}=-2\end{cases}$

quindi in definitiva la risposta alla domanda iniziale è affermativa: si avrà $\frac{5x-41}{(x+3)(x-5)} = \frac{7}{x+3} - \frac{2}{x-5}$

Ora determina tu i valori delle costanti A, B, C negli esercizi seguenti:

a) $\frac{9x+4}{(2x-3)(x+1)} = \frac{\text{A}}{2x-3} + \frac{\text{B}}{x+1}$ b) $\frac{20t+11}{16t^2-1} = \frac{\text{A}}{4t+1} + \frac{\text{B}}{4t-1}$ c) $\frac{5-6x}{x(3x+2)} = \frac{\text{A}}{x} + \frac{\text{B}}{3x+2}$

d) $\frac{2x^2+14x+8}{x(x+2)(x+4)} = \frac{\text{A}}{x} + \frac{\text{B}}{x+2} + \frac{\text{C}}{x+4}$ e) $\frac{3x^2+5x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{\text{A}}{x+1} + \frac{\text{B}}{x+2} + \frac{\text{C}}{x+3}$

15) **Dalla formula di Gauss** $\boxed{\mathbf{1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}}}$ **se ne possono ricavare altre**, assai interessanti.

Ad esempio, è abbastanza semplice (vuoi provarci?) dedurre da questa formula che

a) la somma $\boxed{2+4+6+...+2n}$ dei primi n numeri pari a partire da 2 vale $\boxed{n(n+1)}$

b) mentre la somma $\boxed{1+3+5+...+(2n-1)}$ dei primi n numeri dispari vale $\boxed{n^2}$.

Un po' più laborioso è invece determinare il valore della somma $1^2+2^2+...+n^2$
dei quadrati dei primi n interi positivi.

Partiamo dall'identità $\quad (x+1)^3 = x^3+3x^2+3x+1$
e portiamola nella forma $\quad (x+1)^3 - x^3 = 3x^2+3x+1$
Ora scriviamo le varie uguaglianze che si ottengono dalla precedente dando a x i valori: 1, 2, 3, …

$$\begin{array}{ll}
x=1: & 2^3-1^3=3\cdot1^2+3\cdot1+1\\
x=2: & 3^3-2^3=3\cdot2^2+3\cdot2+1\\
x=3: & 4^3-3^3=3\cdot3^2+3\cdot3+1\\
x=4: & 5^3-4^3=3\cdot4^2+3\cdot4+1\\
... & ...\\
x=n: & (n+1)^3-n^3=3\cdot n^2+3\cdot n+1
\end{array}$$

Sommando membro a membro queste uguaglianze si ha:

$$(n+1)^3-1^3=3\cdot\left(1^2+2^2+...+n^2\right)+3\left(1+2+...+n\right)+\underbrace{\left(1+1+...+1\right)}_{n\ \ addendi}$$

quindi, tenuto conto della formula di Gauss,

$$(n+1)^3-1=3\cdot\left(1^2+2^2+...+n^2\right)+3\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n$$

da cui l'identità

$$1^2+2^2+...+n^2=...\ \text{(scrivi tu il secondo membro!)}$$

c) *Verifica che in questo modo si ottiene, dopo qualche passaggio, la formula*

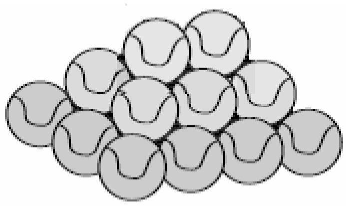
$$\boxed{\mathbf{1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}}$$

d) *Operando in modo analogo, dimostra la formula* $\boxed{1^3+2^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}}=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

dalla quale si trae immediatamente la bella relazione

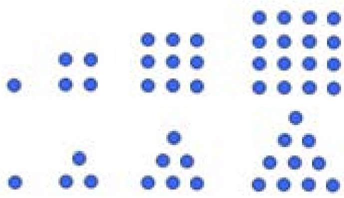
$$\boxed{\mathbf{1^3+2^3+...+n^3=(1+2+...+n)^2}}$$

16) La figura qui a fianco mostra alcune palline da tennis sistemate su più strati sovrapposti: quello più in alto è formato da 2 palline soltanto, quello appena sotto da 6 palline, quello sotto ancora da 12, ecc.
Se si avessero n strati, le palline dello strato inferiore sarebbero $n(n+1)$;
… ma quante palline si avrebbero nella pila, in totale?



17) I numeri "**quadrati**" sono
$1^2=1,\quad 2^2=4,\quad 3^2=9,\quad 4^2=16,\quad 5^2=25,\quad ...$

I seguenti numeri si dicono invece "**triangolari**":
$1,\quad 1+2=3,\quad 1+2+3=6,\quad 1+2+3+4=10,\quad 1+2+3+4+5=15,\quad ...$

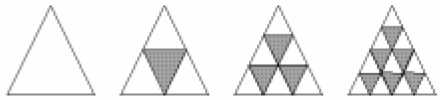


Serviti della formula di Gauss per dimostrare il seguente enunciato:
"ciascun numero quadrato è uguale alla somma del numero triangolare di ugual posto, e del numero triangolare che precede quest'ultimo" (*es.*: 16 = 10 + 6)

18) University of New Brunswick - Junior High School Mathematics Competition 1991

The average (*media*) of the first 100 000 odd (*dispari*) positive integers is
a) 100 000 b) 1 000 000 c) 10 000 000 d) 100 000 000 e) 1 000 000 000

19) Spunto preso da Olimpiadas Colombianas De Matematicas, 1999
Nell' n-esima figura di questo tipo, $\rightarrow$
che frazione del triangolo grande resta ombreggiata?



20) British Columbia Colleges - Junior High School Mathematics Contest - Final Round, 1999
The page numbers of a book sum to 1999. One page number was counted twice.
Which page number was that?

RISPOSTE

3) In effetti l'uguaglianza $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}$ è, come si può controllare, un'identità

4) $\frac{n(n+1)(n+2)}{n+(n+1)+(n+2)}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3n+3}=\frac{n\cancel{(n+1)}(n+2)}{3\cancel{(n+1)}}=\frac{n(n+2)}{3}$ 5) $\frac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)}=\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$

6) $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}+\frac{2}{n+1}$ 7) Diventa $\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}=\frac{3}{n}+\frac{2}{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}$

8) Con $b=a$: $\frac{a^2}{(a+1)^2}=\left(1-\frac{1}{a+1}\right)^2$ 9) I) d II) $\dfrac{\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}}=\frac{n+1}{n}$ III) $n+1$ 10) c 11) d

12)

	imposs.	indet.	$=0$
$\frac{x+12}{x-21}$	$x=21$	/	$x=-12$
$\frac{4x-2}{2x-1}$	/	$x=\frac{1}{2}$	/
$\frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-7x+12}$	$x=3,\ x=4$	/	$x=0,\ x=1,\ x=2$
$\frac{3x+1}{3x}$	$x=0$	/	$x=-\frac{1}{3}$
$\frac{3x}{3x+1}$	$x=-\frac{1}{3}$	/	$x=0$
$\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$	$x=3$	$x=2$	$x=1$
$\frac{9x+27}{x^2+6x+9}$	/	$x=-3$	/

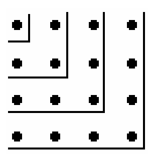
13) La differenza è nel "campo di esistenza". $\frac{x-4}{x-2}$ ha significato per tutti i valori di x tranne $x=2$,
$\dfrac{1}{1+\frac{2}{x-4}}$ perde significato sia con $x=2$ che con $x=4$.
Per tutti i valori di x tranne 2 e 4 le frazioni assumono lo stesso valore.

14) a) $\begin{cases}A=7\\B=1\end{cases}$ b) $\begin{cases}A=-3\\B=8\end{cases}$ c) $\begin{cases}A=5/2\\B=-27/2\end{cases}:\ \frac{5/2}{x}+\frac{-27/2}{3x+2}=\frac{5}{2x}-\frac{27}{2(3x+2)}$ d) $\begin{cases}A=1\\B=3\\C=-2\end{cases}$ e) $\begin{cases}A=-1\\B=-2\\C=6\end{cases}$

15a) $2+4+6+...+2n=2(1+2+3+...+n)=\cancel{2}\cdot\frac{n(n+1)}{\cancel{2}}=n(n+1)$

15b) $1+3+5+...+(2n-1)=(2-1)+(4-1)+(6-1)+...+(2n-1)=$
$=(2+4+6+...+2n)-n=n(n+1)-n=n^2+n-n=n^2$

La figura qui a fianco $\rightarrow$
visualizza e giustifica
efficacemente l'enunciato!



16) $\sum_{1}^{n}k(k+1)=1\cdot(1+1)+2\cdot(2+1)+3\cdot(3+1)+...+n\cdot(n+1)=1+1+4+2+9+3+...+n^2+n=$
$=(1+4+9+...+n^2)+(1+2+3+...+n)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}=...=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

18) a
19) $\frac{n-1}{2n}$
20) page 46