

### 1.3 - ANGOLI; CONGRUENZA; SOMMA DI SEGMENTI E DI ANGOLI

#### Definizione di ANGOLO

Dicesi “angolo”

ciascuna delle due parti di piano delimitate da due semirette (“lati” dell’angolo) uscenti dallo stesso punto (“vertice” dell’angolo).

Quindi due semirette aventi l’origine in comune non individuano un angolo solo, ma **DUE** angoli (vedi fig. 7a qui a destra).

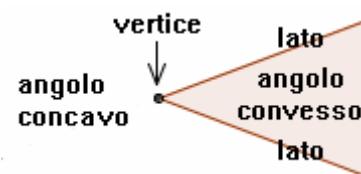


Fig. 7a: due angoli.

Quello concavo è tutta la parte di piano lasciata in bianco.

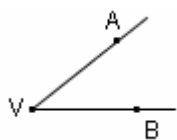


Fig. 7b

La fig. 7b qui a sinistra mostra DUE angoli:

si indicano con le scritture  $\widehat{AVB}$  e  $\widehat{AVB}_{\text{concavo}}$

Un angolo può anche essere indicato con una lettera dell’alfabeto greco minuscolo:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ , ...

Clicca sulla freccia per l’alfabeto greco completo ➡

#### Definizione di ANGOLO PIATTO

Un angolo si dice “piatto”

se i suoi lati sono uno il prolungamento dell’altro

(sono due semirette non sovrapposte, aventi la stessa origine e giacenti sulla stessa retta).

Due semirette, che siano una il prolungamento dell’altra, individuano evidentemente DUE angoli piatti (fig. 8).

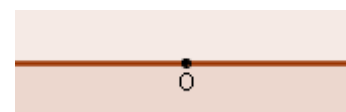


Fig. 8: due angoli piatti

#### Definizione di ANGOLO CONVESSO e ANGOLO CONCAVO

Un angolo (che non sia piatto) si dice “convesso” se

non contiene i prolungamenti dei suoi lati, “concavo” se li contiene.

Ponendo la definizione in questo modo si riesce ad evitare di parlare di “angolo più piccolo” e “angolo più grande”, in quanto, per essere del tutto rigorosi, la nozione di “confronto fra due angoli” non è stata ancora introdotta (lo sarà tra breve).

Una possibile **definizione alternativa di angolo convesso** è la seguente:

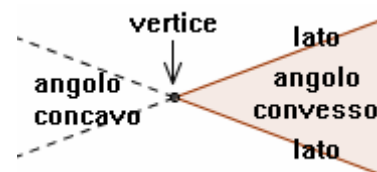
dati tre punti non allineati A, O, B (fig. 9b),

si dice angolo convesso  $\widehat{AOB}$  l’intersezione (cioè, la parte comune) fra

i) il semipiano che ha per origine la retta OA e contiene B,

ii) e il semipiano che ha per origine la retta OB e contiene A.

□ Ombreggia o colora, in figura 9b, tali due semipiani: la parte che risulterà doppiamente ombreggiata sarà l’angolo convesso  $\widehat{AOB}$



L’angolo concavo è quello che contiene i prolungamenti dei suoi lati!

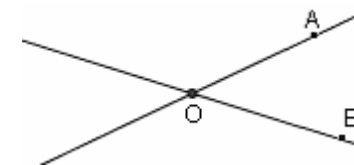


Fig. 9b

#### Definizione di ANGOLO GIRO e ANGOLO NULLO:

sono quelli che hanno per lati due semirette sovrapposte.



Fig. 10 qui a sinistra:

Un angolo giro

(notare che esso riempie tutto il piano!) e un angolo nullo.

Entrambi hanno per lati le semirette  $s$ ,  $s'$ .

Il simbolo  $\equiv$  significa “coincidente con”.

#### Definizione di

#### “CONGRUENZA” (ma noi diremo semplicemente “uguaglianza”) TRA FIGURE

Due figure (per “figura” si intende un qualunque insieme di punti nel piano, o nello spazio) si dicono “congruenti” (ma noi useremo semplicemente il termine “uguali”) se è possibile, tramite un “movimento rigido”, sovrapporre una di esse all’altra in modo che vengano a combaciare perfettamente.

Il concetto di “movimento rigido” è un concetto primitivo, non definibile:

potremmo tentare di descriverlo scrivendo che un “movimento rigido” è un movimento che “non deforma” la figura che viene mossa, ma in questo modo non potremmo pretendere di dare una vera e propria “definizione” di “movimento rigido”, in quanto non faremmo altro che ricondurci al concetto di “forma”, che non abbiamo precedentemente definito, e la cui definizione sarebbe estremamente problematica.

Il simbolo di “congruenza” sarebbe “ $\cong$ ”; ma noi useremo semplicemente “ $=$ ”.

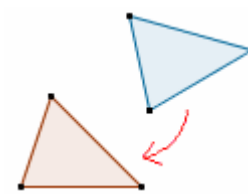


Fig. 11

Questi due triangoli sono “uguali”, “congruenti”, “sovrapponibili in modo perfetto tramite un opportuno movimento rigido”

**Definizione di “segmenti consecutivi”**

Due segmenti si dicono “consecutivi” se **hanno un estremo in comune** (e, a parte questo estremo, **non hanno in comune nessun altro punto**).  
Ad es., i segmenti  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  della fig. 12 qui a fianco sono consecutivi.

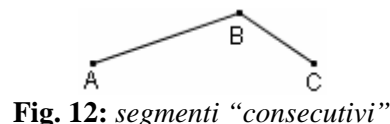


Fig. 12: segmenti “consecutivi”

**Definizione di “segmenti adiacenti”**

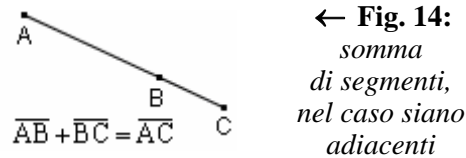
Due segmenti si dicono “adiacenti” se **sono consecutivi e inoltre giacciono sulla stessa retta** (come i segmenti  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  della fig. 13 qui a fianco).



Fig. 13:  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  sono “adiacenti”

**Somma e differenza di due segmenti**

- Dati due segmenti **adiacenti**, il segmento che ha per estremi **i due loro estremi non sovrapposti**, viene detto “la **somma**” dei due segmenti dati (vedi fig. 14).
- Considerati poi due segmenti **non adiacenti**, come  $\overline{PQ}$  ed  $\overline{RS}$  della fig. 15, per sommarli si costruirà, adiacente ad uno di essi (ad es.  $\overline{PQ}$ ), un segmento uguale all’altro (NOTA).
- E’ ora ovvio definire cosa si intenda per “**differenza**” fra due segmenti.



← Fig. 14: somma di segmenti, nel caso siano adiacenti

Ad esempio, con riferimento alla fig. 14, è:

$$\overline{AC} - \overline{BC} = \overline{AB}; \quad \overline{AC} - \overline{AB} = \overline{BC}.$$

Perciò possiamo dire che la differenza  $a - b$

è quel segmento  $c$  tale che  $c + b = a$

(la **differenza fra due segmenti è quel segmento che, se venisse sommato col secondo, permetterebbe di riottenere il primo**).

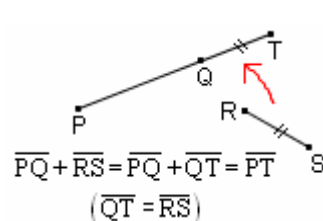


Fig. 15 ↑ : somma di due segmenti, nel caso generale

**NOTA**

Osserviamo che quanto scritto presuppone l’accettazione di un nuovo assioma, chiamato “**assioma del trasporto del segmento**” (fig. 16): **dati una semiretta  $s$  di origine  $O$  ed un segmento  $a$ , sulla semiretta esiste uno e un solo segmento avente un estremo in  $O$  e uguale (congruente, sovrapponibile) al segmento  $a$ .**

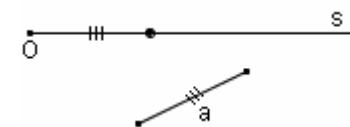


Fig. 16: l’assioma del trasporto del segmento

**Definizione di “angoli consecutivi”**

Due angoli si dicono “consecutivi” se **hanno il vertice e un lato in comune** (e, a parte questo lato, non hanno **nessun altro punto comune**)

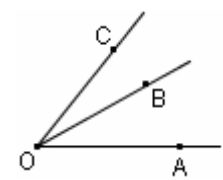


Fig. 17:  $\widehat{AOB}$ ,  $\widehat{BOC}$  sono consecutivi

**Definizione di “angoli adiacenti”**

- Due angoli si dicono “adiacenti” se
- i) sono **consecutivi**
- ii) e inoltre **i lati non sovrapposti giacciono sulla stessa retta**

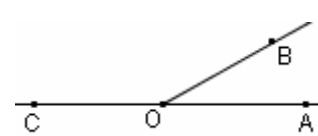


Fig. 18:  $\widehat{AOB}$ ,  $\widehat{BOC}$  sono adiacenti

**Somma e differenza di due angoli**

- Dati due angoli **consecutivi**, l’angolo che ha per lati i loro due lati non sovrapposti, viene detto “**somma**” dei due angoli dati (fig. 19). Evidentemente, se due angoli sono adiacenti, allora la loro somma è un angolo piatto.
- Considerati ora due angoli **non consecutivi** come  $\alpha$ ,  $\beta$  di fig. 20, per sommarli si costruirà, consecutivo ad uno di essi (ad es.  $\alpha$ ), un angolo uguale all’altro. Analogamente a quanto fatto per i segmenti, si accetta, a questo proposito, l’ “**assioma del trasporto dell’angolo**”.
- E’ poi ovvio definire cosa si intenda per “**differenza**” fra due angoli. Ad esempio, con riferimento alla fig. 19, è  $\widehat{AOC} - \widehat{AOB} = \widehat{BOC}$ ;  $\widehat{AOC} - \widehat{BOC} = \widehat{AOB}$ . Insomma, la differenza fra due angoli è quell’angolo che, sommato col secondo, permette di riottenere il primo.

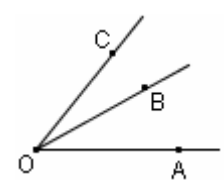


Fig. 19:  $\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = \widehat{AOC}$

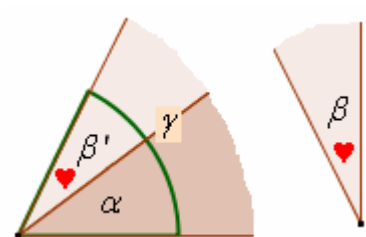


Fig. 20:  $\alpha + \beta = \alpha + \beta' = \gamma$  ( $\beta' = \beta$ )

**Confronto fra segmenti** (coppia di figure 21a, 21b)

Per confrontare due segmenti  $a, b$   
(onde stabilire se  $a < b$  oppure  $a > b$  oppure  $a = b$ )  
si sottopone uno di essi ad un movimento rigido  
che lo sovrapponga parzialmente all'altro, in modo che  
un estremo di  $a$  venga a coincidere con un estremo di  $b$ .  
A questo punto, quello, fra i due segmenti,  
che "scappa fuori" dall'altro, sarà il maggiore.

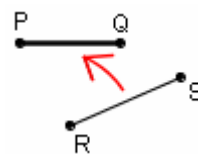
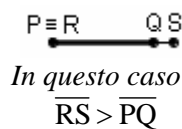


Fig. 21a



In questo caso è  
 $\overline{RS} > \overline{PQ}$

Fig. 21b

**Confronto fra angoli** (coppia di figure 21c, 21d)

Analogamente, per confrontare due angoli  $\alpha, \beta$   
(onde stabilire se  $\alpha < \beta$  oppure  $\alpha > \beta$  oppure  $\alpha = \beta$ )  
si sottopone uno di essi ad un movimento rigido  
che lo sovrapponga parzialmente all'altro,  
in modo che un lato di  $\alpha$  venga a coincidere con un lato di  $\beta$ .  
A questo punto, quello, fra i due angoli,  
che "scappa fuori" dall'altro, sarà il maggiore.

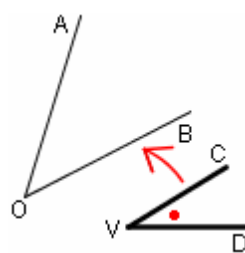


Fig. 21c

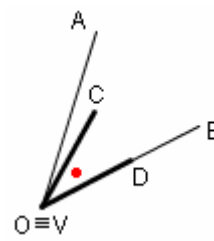


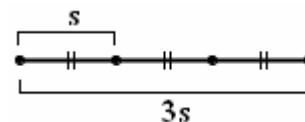
Fig. 21d

In questo caso è  
 $\widehat{A\hat{O}B} > \widehat{C\hat{V}D}$

**Assioma: la disuguaglianza fra segmenti gode della "proprietà transitiva":**  $(a < b \wedge b < c) \rightarrow a < c$ .  
Analogamente per la disuguaglianza fra angoli.

**Multipli di un segmento**

**Sommando un segmento  $s$  con sé stesso** (o con un segmento uguale a sé stesso),  
**più volte, si ottengono i cosiddetti "multipli" del segmento dato:**  
si tratta dei segmenti  $s + s = 2s$ ,  $s + s + s = 3s$ ,  $s + s + s + s = 4s$ , ...

Fig. 22:  $s + s + s = 3s$ **Sottomultipli di un segmento**

**I sottomultipli di un segmento sono la metà, la terza parte, la quarta parte, ...**

del segmento dato. L' $n$ -esima parte di un segmento  $s$  si indica col simbolo  $\frac{1}{n}s$

ed è quel segmento  $a$ , tale che  $na = \underbrace{a + a + \dots + a}_{n \text{ addendi}} = s$ .

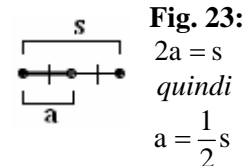


Fig. 23:

 $2a = s$ 

quindi

 $a = \frac{1}{2}s$ 

**Assioma della divisibilità indefinita dei segmenti:**

**dato un segmento  $s$  e un numero naturale non nullo qualsiasi  $n$ , esiste sempre il segmento  $\frac{1}{n}s$ .**

Analogamente si definiscono i multipli e i sottomultipli di un angolo;  
si accetta poi l'assioma della **divisibilità indefinita degli angoli**.

**Definizione di angolo retto**

E' la metà di un angolo piatto.

Gli angoli retti si segnano preferibilmente con un **quadrato**.

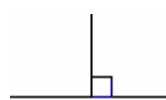


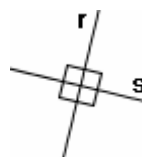
Fig. 24:

un angolo retto  
(ed un altro, non segnato,  
al suo fianco)

**Definizione di rette perpendicolari**

Due rette si dicono "**perpendicolari**", o anche "**ortogonali**",  
se **incontrandosi formano 4 angoli retti**.

Il simbolo di perpendicolarità è una "T" rovesciata.

Fig. 25:  $r \perp s$ **Misura degli angoli**

Si è deciso di assumere come unità di misura per gli angoli

la **trecentosessantesima parte dell'angolo giro**, chiamata "**angolo grado**" o semplicemente "**grado**".

Di conseguenza un angolo giro misurerà  $360^\circ$ , un angolo piatto  $180^\circ$ , un angolo retto  $90^\circ$  e un angolo nullo  $0^\circ$ .

Definizione di

**angoli complementari, supplementari, esplementari**

Due angoli si dicono:

- **complementari** se danno per somma un angolo retto ( $= 90^\circ$ )
- **supplementari** se danno per somma un angolo piatto ( $= 180^\circ$ )
- **esplementari** se danno per somma un angolo giro ( $= 360^\circ$ )

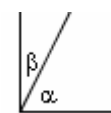


Fig. 26a:

 $\alpha + \beta = 90^\circ$ 

quindi  $\alpha, \beta$  sono  
complementari

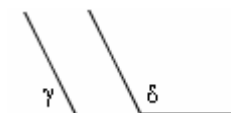


Fig. 26b:

 $\gamma + \delta = 180^\circ$ 

quindi  $\gamma, \delta$  sono  
supplementari

**Definizione di bisettrice di un angolo**

Così viene chiamata la **semiretta che, partendo dal vertice,**  
**divide l'angolo stesso in due parti fra loro uguali**.



Fig. 27:

un angolo e - tratteggiata -  
la sua bisettrice