

1.4 - ASSIOMI SU UGUAGLIANZE, DISUGUAGLIANZE, SOMME E DIFFERENZE

□ L'uguaglianza (congruenza) fra figure geometriche gode delle seguenti tre proprietà (assiomi):

• **PROPRIETA' RIFLESSIVA**

Ogni figura è uguale a sé stessa: $\forall A, A = A$ (il simbolo \forall significa "per ogni, per qualsiasi")

• **PROPRIETA' SIMMETRICA**

Se una figura A è uguale ad una figura B , allora anche B è uguale ad A : $A = B \rightarrow B = A$

Useremo sovente la freccia \rightarrow per schematizzare "SE ... ALLORA ..." (oppure "... IMPLICA ...") o in certi casi "QUINDI, DI CONSEGUENZA"

• **PROPRIETA' TRANSITIVA**

Se una figura A è uguale ad una figura B , e la figura B a sua volta è uguale ad una figura C , allora A è uguale a C :

$(A = B \wedge B = C) \rightarrow A = C$ (in altre parole, **due figure uguali ad una terza sono uguali fra loro**).

□ La somma di segmenti gode delle proprietà commutativa e associativa. Idem per la somma di angoli.

□ **Somme, e differenze, di segmenti uguali sono uguali.** Vale a dire:

$$(a = b \wedge c = d) \rightarrow a + c = b + d; \quad (a = b \wedge c = d) \rightarrow a - c = b - d \quad (\text{qui si suppone } a > c)$$

Questo assioma può essere anche enunciato dicendo che

se due uguaglianze fra segmenti sono entrambe vere, allora addizionando

o sottraendo membro a membro tali due uguaglianze si ottiene ancora un'uguaglianza vera:

$$\begin{array}{r} a = b \\ c = d \\ \hline a + c = b + d \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a = b \\ c = d \\ \hline a - c = b - d \end{array}$$

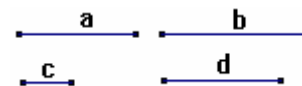


□ **Un assioma analogo al precedente vale per gli angoli;** quindi:

somme (e differenze) di angoli uguali sono uguali; oppure, in altre parole: addizionando (o sottraendo) membro a membro due uguaglianze vere fra angoli si ottiene ancora un'uguaglianza vera.

□ Se quattro segmenti a, b, c, d sono tali che $a < b$ e $c < d$, allora $a + c < b + d$; e se quattro segmenti a, b, c, d sono tali che $a > b$ e $c > d$, allora $a + c > b + d$

In altre parole, sommando membro a membro due disuguaglianze vere (e aventi lo stesso verso, cioè: o entrambe col $<$, o entrambe col $>$) fra segmenti, si ottiene ancora una disuguaglianza vera (con lo stesso verso).



Per i 4 segmenti a, b, c, d sopra raffigurati, risulta $a < b, c < d$.

Bene! E' vero ora che $a + c < b + d$, mentre la disuguaglianza che si otterrebbe

Osservazione: invece non è lecito SOTTRARRE membro a membro due disuguaglianze dello stesso verso, nel senso che la disuguaglianza che così si otterrebbe non è sempre vera: può essere vera o falsa, a seconda dei casi.

Ad es., per la quaterna di segmenti della figura qui a fianco, sarebbe falsa.

sottraendo membro a membro, ossia $a - c < b - d$, è FALSA.

□ **Un assioma analogo al precedente vale per gli angoli.**

□ **Addizionando, o sottraendo, uno stesso termine da entrambi i membri di una disuguaglianza vera, si ottiene ancora una disuguaglianza vera:** $a < b \rightarrow a + c < b + c$; $a < b \rightarrow a - c < b - c$. Idem col $>$.

□ **Segmenti doppi di segmenti uguali sono uguali:** $a = b \rightarrow 2a = 2b$

□ **Metà di segmenti uguali sono uguali:** $a = b \rightarrow \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}b$

□ **Più in generale:** $a = b \rightarrow ma = mb$; $\frac{1}{n}a = \frac{1}{n}b$; $\frac{m}{n}a = \frac{m}{n}b$ ($m, n \in \mathbb{N}^*$; la scrittura $\frac{m}{n}a$ significa $m \cdot \frac{1}{n}a$)

□ **Assiomi analoghi ai tre precedenti valgono per gli angoli.** Quindi:

angoli doppi di angoli uguali sono uguali; metà di angoli uguali sono uguali;

e in generale, moltiplicando per uno stesso numero razionale positivo entrambi i membri di un'uguaglianza vera fra angoli, si ottiene ancora un'uguaglianza vera.

□ Per i segmenti, leggendo prima i tre simboli "sopra" ($<$) poi i tre "sotto" ($>$): $a \leq b \rightarrow 2a \leq 2b$ e $\frac{1}{2}a \leq \frac{1}{2}b$;

più in generale, $a \leq b \rightarrow ma \leq mb, \frac{1}{n}a \leq \frac{1}{n}b, \frac{m}{n}a \leq \frac{m}{n}b$ ($m, n \in \mathbb{N}^*$; la scrittura $\frac{m}{n}a$ significa $m \cdot \frac{1}{n}a$).

E assiomi analoghi valgono per gli angoli.

□ **"Tricotomia":** dati due segmenti a, b , si verifica una e una sola delle tre eventualità $a < b$, oppure $a = b$, o $a > b$. Analogamente per gli angoli.

□ **"Principio di sostitutività":** in una catena di uguaglianze (o di disuguaglianze),

è sempre lecito sostituire al posto di un segmento, un altro segmento che si sa

(per ipotesi, o per dimostrazione precedente) essere uguale al primo. Lo stesso vale anche per gli angoli.