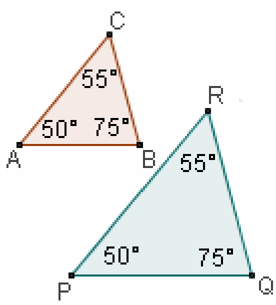
2.3 - I "CRITERI DI UGUAGLIANZA"; IL TRIANGOLO ISOSCELE

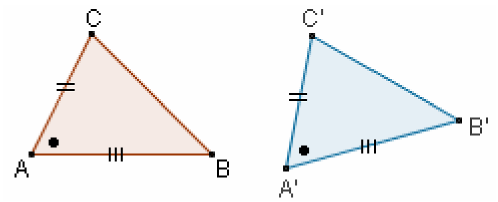
TEOREMA ("1° Criterio di uguaglianza dei triangoli")
Se due triangoli hanno rispettivamente uguali
due lati e l'angolo fra essi compreso, allora sono uguali.

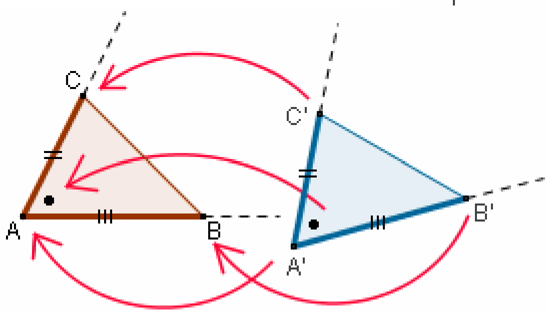
1° Criterio

Questo teorema afferma, in pratica, quanto segue.
Se la compagna di banco mi dice: "non sapevo cosa fare e ho ritagliato da un foglio di carta un triangolo con un lato di 10 cm, un altro lato di 12 cm, e l'angolo compreso di 45° ";
e la Segretaria mi dice: "sulla mia scrivania ho un fermacarte triangolare, con un lato di 10 cm, un altro lato di 12 cm, e l'angolo compreso di 45° "
allora io con assoluta sicurezza, senza bisogno di sapere nient'altro, posso affermare che i due triangoli sono uguali in tutto e per tutto, cioè congruenti, cioè perfettamente sovrapponibili: in particolare, posso esser certo che i due triangoli hanno rispettivamente uguali anche il lato rimanente e i due angoli rimanenti, ossia quegli elementi sui quali non mi era stata data nessuna informazione.

Per capire ancor meglio, facciamo un raffronto con la situazione seguente, che è invece **profondamente diversa**.
Di due triangoli, supponiamo di sapere che hanno i tre **angoli** rispettivamente uguali (ad es., sia l'uno che l'altro abbiano gli angoli che misurano: 50°, 75°, 55°).
Possiamo affermare con sicurezza che sono uguali, congruenti, sovrapponibili?
No di certo!!!
L'uguaglianza rispettiva dei tre angoli garantisce l'uguaglianza della "forma", ma non la sovrapponibilità: infatti i due triangoli potrebbero essere uno l'ingrandimento dell'altro, come nella figura qui a fianco riportata.







IPOTESI: $\overline{AB} = \overline{A'B'}$; $\overline{AC} = \overline{A'C'}$; $\widehat{A} = \widehat{A'}$
TESI: $ABC = A'B'C'$

DIMOSTRAZIONE
Immaginiamo di **spostare, con un movimento rigido, tutto l'angolo $\widehat{A'}$**
(in questo modo ci porteremo dietro, in particolare, il triangolo $A'B'C'$), così da incastrare perfettamente tale angolo nell'angolo $\widehat{A}$ (ciò è certamente possibile perché $\widehat{A} = \widehat{A'}$ per ipotesi). Realizziamo l' "incastro" in modo che la semiretta $A'B'$ vada a posarsi sulla semiretta AB, e la semiretta $A'C'$ sulla AC.
Nell'istante in cui l'angolo $\widehat{A'}$ "atterra" sull'angolo $\widehat{A}$, con il punto A' che si posa sul punto A, la semiretta $A'B'$ che atterra sulla semiretta AB e la semiretta $A'C'$ che atterra sulla semiretta AC, avremo che:

- ✓ il punto B' andrà a sovrapporsi al punto B, in virtù dell'ipotesi $\overline{A'B'} = \overline{AB}$;
- ✓ e il punto C' andrà a sovrapporsi al punto C, in virtù dell'ipotesi $\overline{A'C'} = \overline{AC}$.

Insomma, il movimento rigido cui abbiamo sottoposto l'angolo $\widehat{A'}$ e perciò il triangolo $A'B'C'$, ha portato:
il punto A' sul punto A; il punto B' sul punto B; il punto C' sul punto C; e pertanto ha fatto sovrapporre:
il segmento $\overline{A'B'}$ al segmento $\overline{AB}$; il segmento $\overline{A'C'}$ al segmento $\overline{AC}$; il segmento $\overline{B'C'}$ al segmento $\overline{BC}$.
Quindi il contorno del triangolo $A'B'C'$ si è sovrapposto perfettamente al contorno di ABC; e ne consegue, com'è evidente, che si sono sovrapposte in modo da combaciare anche le rispettive parti interne.
Resta così provato che $A'B'C'$ è perfettamente sovrapponibile, congruente, uguale, ad ABC, C.V.D.

OSSERVAZIONE
♥ **Nell'enunciato del Primo Criterio è essenziale specificare il fatto che l'angolo di cui si parla sia quello COMPRESO fra i due lati considerati**.

Infatti, se due certi triangoli hanno rispettivamente uguali due lati ed un angolo, ma l'angolo non è quello compreso, allora non è detto che i due triangoli siano per forza uguali: potrebbero anche non esserlo, come mostra la figura qui a fianco.
In essa, i due triangoli PRS, RSQ hanno uguali due lati ed un angolo:
$\overline{RP} = \overline{RQ}$; $\overline{RS}$ in comune ($\overline{RS} = \overline{RS}$); $\hat{S}$ in comune ($\hat{S} = \hat{S}$);
tuttavia, non sono affatto uguali. **L'angolo non è "quello compreso"!**