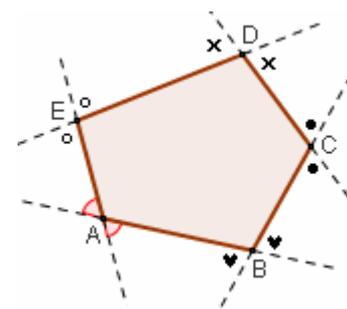


2.4 - IL TEOREMA DELL'ANGOLO ESTERNO IN FORMA DEBOLE

Gli "ANGOLI ESTERNI" di un poligono

In un poligono qualsiasi, si dicono "angoli esterni" gli angoli adiacenti agli angoli interni.

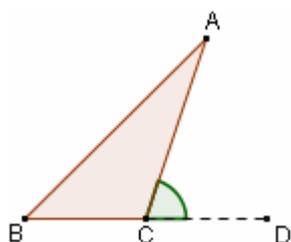
Quindi, in un poligono, a ciascun angolo interno corrispondono DUE angoli esterni, uguali fra loro perché opposti al vertice (vedi figura).



TEOREMA

("TEOREMA DELL'ANGOLO ESTERNO in forma DEBOLE")

In un triangolo, ciascun angolo esterno è maggiore di ciascuno dei due angoli interni ad esso non adiacenti.

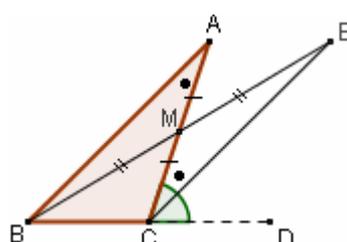


HP

ABC triangolo;
 \widehat{ACD} angolo esterno

TH

$\widehat{ACD} > \widehat{A}$;
 $\widehat{ACD} > \widehat{B}$



A cosa è dovuto l'aggettivo "debole"?
 Al fatto che questo teorema sarà poi seguito da un altro, il "teorema dell'angolo esterno in forma forte", per dimostrare il quale sono però necessari altri teoremi intermedi

DIM.

Effettuiamo le seguenti costruzioni (figura a destra): prendiamo il punto medio di \overline{AC} , indicandolo con M; tracciamo \overline{BM} e prolunghiamo questo segmento di un segmento $\overline{ME} = \overline{BM}$; tracciamo la semiretta CE.

Ora, la semiretta CE è interna all'angolo \widehat{ACD} : questo fatto è il punto chiave del ragionamento dimostrativo.

Che la semiretta CE sia interna ad \widehat{ACD} è osservabile dal disegno, e l'intuizione porta facilmente a convincersi che ciò continuerebbe a esser vero anche se il triangolo avesse una forma diversa.

Tuttavia, il fatto che CE sia interna all'angolo \widehat{ACD} andrebbe, a rigore, DIMOSTRATO.

La dimostrazione utilizzerebbe due assiomi che noi per evitare appesantimenti eccessivi non abbiamo citato:

l' "assioma dei semipiani" e un altro assioma riguardante le semirette aventi l'origine nel vertice di un angolo.

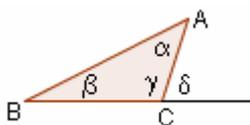
Ci limitiamo a segnalare questo fatto, senza scendere nei particolari.

Bene! Essendo la semiretta CE interna all'angolo \widehat{ACD} , è $\widehat{ACD} > \widehat{ACE}$. Ma i due triangoli BMA, EMC sono uguali per il 1° Criterio ($\overline{AM} = \overline{MC}$ e $\overline{BM} = \overline{ME}$ per costruzione, $\widehat{AMB} = \widehat{CME}$ perché opposti al vertice) e ne consegue, in particolare, che $\widehat{ACE} = \widehat{A}$.

Dunque, essendo $\widehat{ACD} > \widehat{ACE}$, è pure $\widehat{ACD} > \widehat{A}$ e la prima parte della tesi è dimostrata.

- Per la seconda parte ($\widehat{ACD} > \widehat{B}$) basterà prolungare \overline{AC} dalla parte di C costruendo così il secondo dei due angoli esterni adiacenti all'angolo interno \widehat{BCA} (che però sarà uguale ad \widehat{ACD} in quanto suo opposto al vertice), poi prendere il punto medio N del lato \overline{BC} , tracciare la mediana \overline{AN} , prolungarla ecc. ecc.

COROLLARIO: In un triangolo, la somma di due angoli interni è sempre minore di un angolo piatto.



DIM. Per dimostrare che, ad esempio, $\alpha + \gamma < 180^\circ$, basta tener presente che, per il Teorema dell'Angolo Esterno, si ha $\delta > \alpha$ quindi $\alpha < \delta$; ma allora $\alpha + \gamma < \delta + \gamma = 180^\circ$. Per le altre somme $\alpha + \beta$ e $\beta + \gamma$, ci si servirà ogni volta dell'angolo esterno opportuno.

COROLL.: In un triangolo, non possono esserci due angoli retti, né due ottusi, né un retto e un ottuso.

DIM. Infatti, in ciascuno dei tre casi prospettati, la somma dei due angoli interni in questione uguaglierebbe o supererebbe un angolo piatto, il che è assurdo in virtù del corollario precedente.

COROLLARI:

- In un triangolo che abbia un angolo retto, i due angoli rimanenti sono acuti (= minori di 90°).
- In un triangolo con un angolo ottuso, i due angoli rimanenti sono acuti.

**LA CLASSIFICAZIONE
 DEI TRIANGOLI
 IN BASE AGLI ANGOLI**

Da quanto detto, si trae che un triangolo può avere esclusivamente:

- I) un angolo ottuso e due acuti (triangolo "ottusangolo")
- II) un angolo retto e due acuti (triangolo "rettangolo")
- III) tre angoli acuti (triangolo "acutangolo").

Non possono verificarsi altri casi oltre a questi.