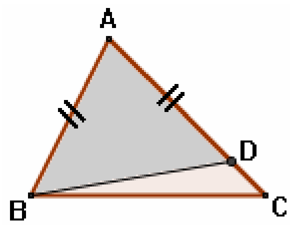
2.5 - DISUGUAGLIANZE FRA GLI ELEMENTI DI UN TRIANGOLO

TEOREMA
Se un triangolo ha due lati disuguali, allora ha disuguali anche gli angoli ad essi opposti, e precisamente: a lato maggiore sta opposto angolo maggiore.



HP
$\overline{AC} > \overline{AB}$

TH
$\hat{B} > \hat{C}$

GLI ESERCIZI (NON FACILI …) SULLE DISUGUAGLIANZE SONO ALLE PAGINE 334 E 335

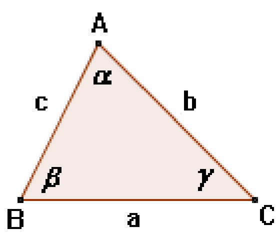
DIM.

Siccome per ipotesi è $\overline{AC} > \overline{AB}$,
se noi prendiamo, sulla semiretta AC, un segmento $\overline{AD} = \overline{AB}$,
il punto D cadrà ALL'INTERNO del segmento $\overline{AC}$.
Ora:

$$\hat{B} = A\hat{B}C \underset{\substack{A\hat{B}D \\ \text{è solo} \\ \text{una parte} \\ \text{di } \hat{B}=A\hat{B}C}}{\underset{\downarrow}{>}} A\hat{B}D \underset{\substack{\text{il triangolo} \\ ABD \\ \text{è isoscele} \\ \text{sulla base } \overline{BD}}}{\underset{\downarrow}{=}} A\hat{D}B \underset{\substack{\text{teorema} \\ \text{dell'angolo} \\ \text{esterno,} \\ \text{triangolo } BDC}}{\underset{\downarrow}{>}} \hat{C} \quad \text{quindi } \boxed{\hat{B} > \hat{C}},$$

C.V.D.

TEOREMA
Se un triangolo ha due angoli disuguali, allora ha disuguali anche i lati ad essi opposti, e precisamente: ad angolo maggiore sta opposto lato maggiore.



HP
$\beta > \gamma$

TH
$b > c$

OSSERVAZIONE

Nella figura, abbiamo adottato una simbologia che è molto comune, e UTILISSIMA, in Geometria: abbiamo indicato

- i vertici del triangolo con A, B, C;
- gli angoli aventi questi vertici RISPETTIVAMENTE con α, β, γ;
- i lati opposti a questi vertici RISPETTIVAMENTE con a, b, c:
  a opposto ad A, b opposto a B, c opposto a C.

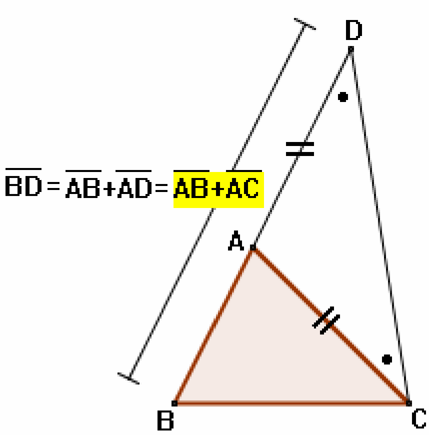
DIM.

L'ipotesi è $\beta > \gamma$; vogliamo dimostrare (tesi) che è $b > c$.
Per assurdo, o, se si preferisce, per esclusione:
♪ se fosse $b < c$, allora, per il teorema precedente, si dovrebbe avere $\beta < \gamma$, contro l'ipotesi;
♫ se fosse $b = c$, allora il triangolo sarebbe isoscele e risulterebbe $\beta = \gamma$, contro l'ipotesi.
Non potendo essere né $b < c$, né $b = c$, dovrà per forza essere $b > c$,

C.V.D.

COROLLARI:
- **In un triangolo rettangolo, il lato maggiore fra tutti è l'ipotenusa**.
- **In un triangolo ottusangolo, il lato maggiore è quello opposto all'angolo ottuso**.

TEOREMA ("DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE")
In un triangolo, ciascun lato è minore della somma degli altri due.



HP
ABC triangolo

TH
$\overline{BC} < \overline{AB} + \overline{AC}$
$\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$
$\overline{AB} < \overline{AC} + \overline{BC}$

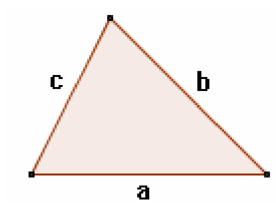
Nella dimostrazione di questo teorema
emerge in modo particolarmente evidente
IL METODO "TOP-DOWN"
ossia, letteralmente,
"**DALLA CIMA VERSO IL BASSO**".

Si parte dall'obiettivo da raggiungere,
e ci si domanda:
di quali obiettivi intermedi avremmo bisogno
per raggiungere questo obiettivo finale?

Poi il processo può essere eventualmente
iterato (= ripetuto),
applicandolo anche agli obiettivi intermedi.

DIM.
Dimostriamo che $\overline{BC} < \overline{AB} + \overline{AC}$;
per provare le altre due disuguaglianze si può procedere in modo analogo.
Vogliamo innanzitutto COSTRUIRE un segmento che sia uguale alla somma $\overline{AB} + \overline{AC}$,
e lo faremo prolungando $\overline{AB}$, dalla parte di A, di un segmento $\overline{AD} = \overline{AC}$.
Avremo appunto $\overline{BD} = \overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AB} + \overline{AC}$.
A questo punto si tratta di dimostrare che $\overline{BC} < \overline{BD}$.
E a tale scopo, se riuscissimo a far vedere che nel triangolo BCD, fra i due angoli $B\hat{C}D$ e $\hat{D}$,
il primo è maggiore del secondo, saremmo a posto in virtù del teorema precedente.
Ma ben facile provare che $B\hat{C}D > \hat{D}$!
Infatti $B\hat{C}D > A\hat{C}D$ perché $A\hat{C}D$ è solo una parte di $B\hat{C}D$;
e $A\hat{C}D = \hat{D}$ perché angoli alla base di un triangolo che è isoscele per costruzione.
La tesi è quindi dimostrata.

TEOREMA
In un triangolo, ciascun lato è maggiore della differenza degli altri due.



HP E' dato un triangolo di lati a, b, c
(supponiamo per comodità di aver indicato
con a il lato maggiore, con b l'intermedio, con c il minore;
insomma, supponiamo $a \ge b \ge c$)

TH
I) $a > b - c$
II) $b > a - c$
III) $c > a - b$

DIM.
Le tre disuguaglianze della tesi seguono dalle tre disuguaglianze
la cui verità è assicurata dal teorema precedente.
Questo, infatti, ci dice che :

$a < b + c$;
$b < a + c$;
$c < a + b$.

Prendiamo, ad esempio, $a < b + c$.

Questo teorema
è a volte denominato
"della disuguaglianza
triangolare inversa".
Riunendo i due enunciati
di questa pagina, abbiamo che
"*in ogni triangolo, ciascun lato è
minore della somma degli altri due
e maggiore della loro differenza*".

Se in questa disuguaglianza noi sottraiamo lo stesso segmento c da entrambi i membri, ne ricaveremo:

$a - c < b \cancel{+c} \cancel{-c}$ ossia $a - c < b$,

quindi (leggendo come gli Arabi, da destra a sinistra), $b > a - c$, che è la tesi II).

Analogamente,
la tesi I) si può dedurre a partire da $b < a + c$ sottraendo c da entrambi i membri;
e infine la tesi III) segue dalla $a < b + c$ sottraendo b da entrambi i membri.