3.3 - RETTE PARALLELE

LE DIMOSTRAZIONI "PER ASSURDO"

Il secondo COROLLARIO del Teorema dell'Angolo Esterno (pag. 287),
e il TEOREMA di Unicità della Perpendicolare per un punto dato a una retta data (pag. 294),
sono stati dimostrati tramite un ragionamento "PER ASSURDO".

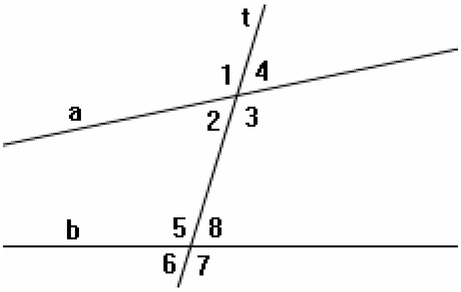
Una dimostrazione "**PER ASSURDO**" consiste nel **provare a negare la tesi,**
e nel far vedere che così facendo, si giunge a conclusioni che "non stanno in piedi"
perché sono in contrasto

- **o con l'ipotesi,**
- **o con qualche assioma,**
- **o con qualche teorema già dimostrato in precedenza**.

Ma se negando la tesi si perviene a conclusioni assurde, allora resta dimostrato che la tesi è vera!!!

ANGOLI FORMATI DA DUE RETTE CON UNA TRASVERSALE: TERMINOLOGIA

Quando due rette vengono tagliate da una "trasversale" (cioè, da una terza retta che le interseca entrambe) si formano 8 angoli, che a due a due prendono nomi particolari.



- **CORRISPONDENTI**: $\hat{1}$ e $\hat{5}$; $\hat{2}$ e $\hat{6}$; $\hat{3}$ e $\hat{7}$; $\hat{4}$ e $\hat{8}$
- **ALTERNI INTERNI**: $\hat{2}$ e $\hat{8}$, $\hat{3}$ e $\hat{5}$
- **ALTERNI ESTERNI**: $\hat{1}$ e $\hat{7}$, $\hat{4}$ e $\hat{6}$
- **CONIUGATI INTERNI**: $\hat{2}$ e $\hat{5}$, $\hat{3}$ e $\hat{8}$
- **CONIUGATI ESTERNI**: $\hat{1}$ e $\hat{6}$, $\hat{4}$ e $\hat{7}$

(**alterni = da parti opposte** rispetto alla trasversale;
coniugati = dalla stessa parte rispetto alla trasversale)

TEOREMA (T. D. P., ossia: "T. Diretto sul Parallelismo")
Se due rette formano con una trasversale:

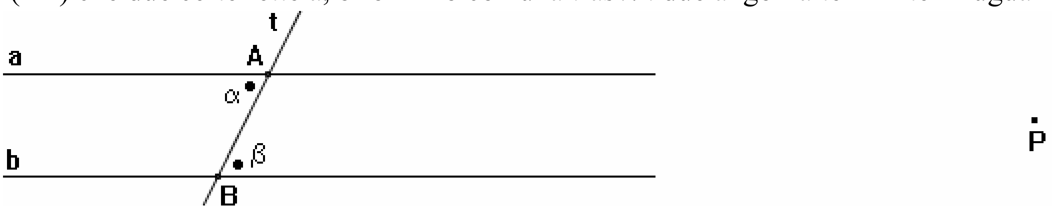
1) **due angoli alterni interni uguali**
2) **oppure due angoli alterni esterni uguali**
3) **oppure due angoli corrispondenti uguali**
4) **oppure due angoli coniugati interni supplementari**
5) **oppure due angoli coniugati esterni supplementari**

allora sono parallele.

Per ora, adottiamo la seguente
DEFINIZIONE:
"due RETTE si dicono PARALLELE quando giacciono su uno stesso piano e non si incontrano mai, cioè non hanno nessun punto in comune".
Successivamente (pag. 299) passeremo ad una *definizione* "*estensiva*" di parallelismo.

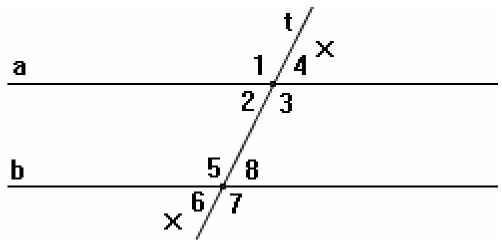
- *OSSERVAZIONE*
  In pratica, abbiamo riassunto in un unico enunciato ben 5 teoremi. Ma una volta dimostrato il primo ("se due rette formano con una trasversale due angoli alterni interni uguali, allora sono parallele"), il più sarà fatto, perché i quattro rimanenti si ricondurranno facilmente a quello.

DIMOSTRAZIONE di 1):
"se due rette formano con una trasversale due angoli alterni interni uguali, allora sono parallele".
Supponiamo (HP) che due certe rette a, b formino con una trasv. t due angoli alterni interni uguali: $\alpha = \beta$.



Vogliamo dimostrare (TH) che le due rette a, b sono parallele.
Per assurdo.
Se a, b NON fossero parallele, allora si incontrerebbero in un punto,
che per meglio fissare le idee ho chiamato P. Ma in questo modo si formerebbe un triangolo, ABP,
avente un angolo esterno uguale ad un angolo interno ad esso non adiacente!
E ciò non può verificarsi, perché in un triangolo ciascun angolo esterno è sempre MAGGIORE
di ciascun angolo interno non adiacente (Teorema dell'Angolo Esterno).
Perciò è assurdo supporre che le due rette non siano parallele:
bisognerà necessariamente ammettere che lo sono.
La tesi è dimostrata: $a \parallel b$.

DIMOSTRAZIONE DI 2)



In questo paragrafo la freccia $\rightarrow$,
sovente da noi impiegata per schematizzare
"SE … ALLORA …" (oppure "… IMPLICA …")
va piuttosto letta
"QUINDI, DI CONSEGUENZA"

Supponiamo che due certe rette a, b formino con una trasversale t due angoli alterni esterni uguali (quelli indicati con la crocetta).

Allora i due angoli $\hat{2},\ \hat{8}$ sono uguali perché opposti al vertice di angoli uguali (pr. transitiva dell'uguaglianza).

Se vogliamo illustrare "formalmente" questo fatto, possiamo utilizzare …

- … una freccia di implicazione:

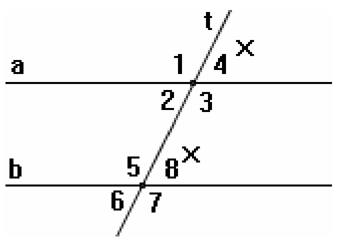
$$\hat{2} \underset{\substack{\text{opposti}\\\text{al vertice}}}{=} \hat{4};\quad \hat{8} \underset{\substack{\text{opposti}\\\text{al vertice}}}{=} \hat{6};\quad \hat{4} \underset{\text{HP}}{=} \hat{6} \quad \underset{\substack{\text{proprietà}\\\text{transitiva}}}{\rightarrow} \quad \hat{2}=\hat{8}$$

- … oppure una catena:

$$\hat{2} \underset{\substack{\text{opposti}\\\text{al vertice}}}{=} \hat{4} \underset{\text{HP}}{=} \hat{6} \underset{\substack{\text{opposti}\\\text{al vertice}}}{=} \hat{8}$$

Ma così siamo ricaduti nel caso 1) (due angoli alterni interni uguali), e la tesi è dimostrata: a || b

DIMOSTRAZIONE DI 3)

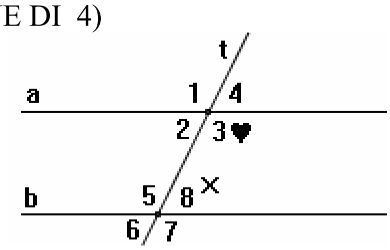


Supponiamo che due certe rette a, b formino con una trasversale t due angoli corrispondenti uguali (quelli indicati con la crocetta).
Allora i due angoli $\hat{2},\ \hat{8}$ sono uguali perché $\hat{2}$ è opposto al vertice di un angolo che è uguale a $\hat{8}$ (proprietà transitiva dell'uguaglianza):

$$\hat{2} \underset{\substack{\text{opposti}\\\text{al vertice}}}{=} \hat{4} \underset{\text{HP}}{=} \hat{8}$$

Si ricade nel caso 1) (due angoli alterni interni uguali),
e la tesi è dimostrata: a || b

DIMOSTRAZIONE DI 4)



Supponiamo che due certe rette a, b formino con una trasversale t due angoli coniugati interni supplementari (quelli indicati con la crocetta e col cuoricino: $\hat{3}+\hat{8}=180°$).

Allora i due angoli $\hat{2},\ \hat{8}$ sono uguali perché supplementari dello stesso angolo $\hat{3}$.
Se vogliamo illustrare "formalmente" questo fatto, possiamo utilizzare …

- … una freccia di implicazione:

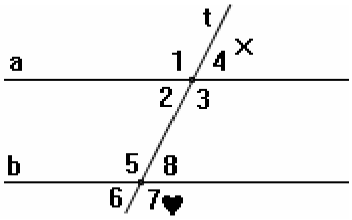
$$\hat{2}=180°-\hat{3};\quad \hat{8} \underset{\text{HP}}{=} 180°-\hat{3} \quad \underset{\substack{\text{proprietà}\\\text{transitiva}}}{\rightarrow} \quad \hat{2}=\hat{8}$$

- … oppure una catena:

$$\hat{2}=180°-\hat{3} \underset{\text{HP}}{=} \hat{8}$$

Ma così siamo ricaduti nel caso 1) (due angoli alterni interni uguali), e la tesi è dimostrata: a || b

DIMOSTRAZIONE DI 5)

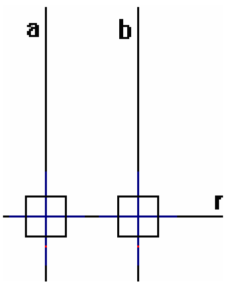


Supponiamo che due certe rette a, b formino con una trasversale t due angoli coniugati esterni supplementari
(quelli indicati con la crocetta e col cuoricino: $\hat{4}+\hat{7}=180°$)
Allora i due angoli $\hat{2},\ \hat{8}$ sono uguali perché:

$$\hat{2} \underset{\substack{\text{opposti}\\\text{al vertice}}}{=} \hat{4} \underset{\text{HP}}{=} 180°-\hat{7}=\hat{8}$$

Si ricade nel caso 1) (due angoli alt. int. uguali), e la tesi è dimostrata: a || b

COROLLARIO
Due rette, che siano perpendicolari ad una stessa retta, sono parallele fra loro.



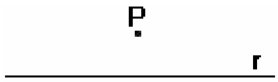
DIM. Se $a \perp r$ e anche $b \perp r$, allora tanto a quanto b formano 4 angoli retti con r.
Avremo dunque $a \parallel b$ perché, ad esempio,
queste due rette formano con la trasversale r angoli corrispondenti uguali.

OSSERVAZIONE

Abbiamo solo "problemi di abbondanza" per provare la tesi:
a ben guardare, uno qualsiasi dei 5 enunciati di cui consta il precedente
Teor. Diretto sul Parallelismo potrebbe essere utilizzato per concludere che è $a \parallel b$.
Oppure ancora, potremmo ragionare per assurdo e dire:
se a, b si incontrassero, allora si formerebbe un triangolo con due angoli retti;
ma tale triangolo, come afferma un teorema precedente, non può esistere.

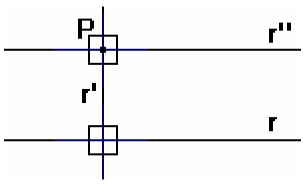
IL PROBLEMA DELL' ESISTENZA DELLA PARALLELA

Dati un punto P *e una retta* r, *esiste sempre una retta che passi per* P *e sia parallela a* r *?*



L'intuizione ci dice: "Senz'altro, sì".
L' "esistenza della parallela per un punto dato a una retta data"
potrebbe quindi essere assunta come nuovo assioma.
Ma ciò non è necessario: infatti tale esistenza è ***dimostrabile come teorema****. Vediamo in che modo.*

TEOREMA (Esistenza della Parallela per un punto dato a una retta data)
Dati un punto P e una retta r, esiste sempre una retta che passi per P e sia parallela a r.

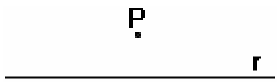


DIM.
Infatti, se per P conduciamo
- la perpendicolare r' alla retta r,
- poi la perpendicolare r'' alla retta r',

avremo che r'' ed r sono parallele, in quanto perpendicolari alla stessa retta r'.

IL PROBLEMA DELL' UNICITA' DELLA PARALLELA

Dati un punto P *e una retta* r, *di rette passanti per* P *e parallele a* r *ce n'è una sola, o ce n'è più d'una?*



L'intuizione ci dice: "Senz'altro, una sola".

Storicamente furono fatti molti tentativi di dimostrare che questo asserto
poteva essere derivato come conseguenza dagli assiomi precedentemente introdotti.
Ma tutti questi tentativi fallirono.

Finalmente, nel XIX secolo, emerse con definitiva evidenza che
l' "unicità della parallela" NON può essere dimostrata come teorema
a partire dalla famiglia degli assiomi antecedenti.

L' "unicità della parallela per un punto dato a una retta data" è quindi UN NUOVO ASSIOMA.
Esso viene denominato anche "postulato di Euclide", in onore del grande padre della Geometria.

♥ ASSIOMA (POSTULATO DI EUCLIDE, o Assioma dell'UNICITA' DELLA PARALLELA)
Dati un punto P e una retta r,
NON ESISTE PIU' DI UNA parallela per P a r.

OSSERVAZIONE
Il Postulato di Euclide, insieme con il teorema, prima dimostrato, secondo cui
" dati un punto P e una retta r, esiste sempre una retta che passi per P e sia parallela a r ",
consente di affermare in definitiva che
" dati un punto P e una retta r, esiste UNA E UNA SOLA parallela per P a r "

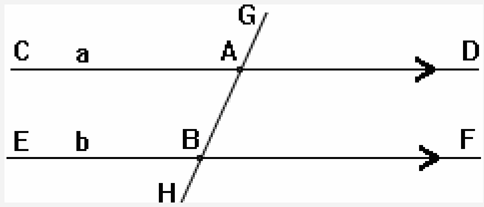
TEOREMA (T. I. P., ossia: "Teorema Inverso sul Parallelismo")

Se due rette sono parallele, allora formano con una qualsiasi trasversale:
1) **angoli alterni interni uguali**
2) **angoli alterni esterni uguali**
3) **angoli corrispondenti uguali**
4) **angoli coniugati interni supplementari**
5) **angoli coniugati esterni supplementari**.

Anche qui, più precisamente, siamo di fronte a ben 5 teoremi, tutti riuniti in un unico enunciato. Oppure, possiamo dire di avere un unico teorema, con 5 tesi. Vediamola in questo modo: ci sono 5 tesi da dimostrare, a partire da una stessa ipotesi. *Ma niente paura, perché, una volta dimostrata la tesi* 1), *le altre ne saranno conseguenze pressoché immediate.*

IPOTESI: $a \parallel b$

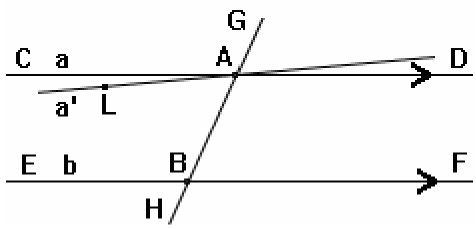
TESI:
1) gli alterni interni sono uguali: $C\hat{A}B = F\hat{B}A$, $D\hat{A}B = E\hat{B}A$
2) gli alterni esterni sono uguali: $G\hat{A}C = H\hat{B}F$, $G\hat{A}D = H\hat{B}E$
3) i corrispondenti sono uguali: $G\hat{A}C = A\hat{B}E$, ecc. ecc.
4) i coniugati interni sono supplementari: $C\hat{A}B + E\hat{B}A = 180°$, $D\hat{A}B + F\hat{B}A = 180°$
5) i coniugati esterni sono supplementari: $G\hat{A}C + H\hat{B}E = 180°$, $G\hat{A}D + H\hat{B}F = 180°$



♥ Notare la **coppia di frecce** sul disegno: le utilizzeremo, talvolta (non sempre: tendono a "sporcare" la figura), per **indicare il parallelismo *noto*** tra due rette.

DIMOSTRAZIONE DELLA TESI 1)

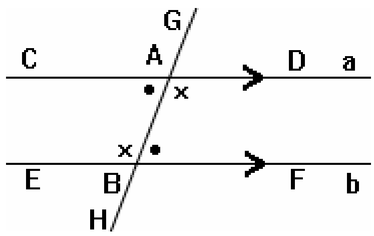
La nostra HP è $a \parallel b$; la tesi è che gli alterni interni sono uguali. Cominciamo col provare che è $C\hat{A}B = F\hat{B}A$.
Per assurdo: se questi due angoli non fossero uguali, allora si potrebbe tracciare, per il punto A, una retta a', distinta dalla a, in modo che questa nuova retta formi un nuovo angolo $L\hat{A}B = F\hat{B}A$.
Consideriamo ora le due rette a', b.
Esse formano con la trasversale GH due angoli alterni interni uguali e perciò è $a' \parallel b$ in virtù del Teorema Diretto sul Parallelismo.
D'altra parte, per ipotesi, è pure $a \parallel b$.



Ma allora per il punto A passerebbero DUE rette distinte (a', a) entrambe parallele alla stessa retta b.
E ciò è in contraddizione col Postulato di Euclide (Unicità della Parallela). Ricapitoliamo: supponendo che i due angoli $C\hat{A}B$, $F\hat{B}A$ non fossero uguali, siamo giunti a una conclusione che è assurda, in quanto contraddice un assioma che abbiamo accettato. Resta perciò dimostrato che è $C\hat{A}B = F\hat{B}A$.
Ma da $C\hat{A}B = F\hat{B}A$ segue subito l'uguaglianza degli altri due alterni interni: infatti essi sono supplementari di due angoli già dimostrati uguali: $D\hat{A}B = 180° - C\hat{A}B = 180° - F\hat{B}A = E\hat{B}A$.

DIMOSTRAZIONE DELLE TESI 2, 3, 4, 5)

A questo punto, le tesi 2), 3), 4) e 5) si deducono immediatamente. Considera la figura qui a fianco: in essa è segnato ciò che già abbiamo acquisito, ossia le due uguaglianze $C\hat{A}B = F\hat{B}A$; $D\hat{A}B = E\hat{B}A$.
Se ora prendi la matita e vai a segnare col puntino ogni angolo che è opposto al vertice di un angolo "puntino", e con la crocetta ogni angolo che è opposto al vertice di un angolo "crocetta", avrai subito le altre tesi.

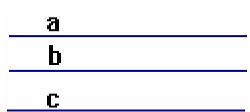


SIGNIFICATO "ESTENSIVO" DELL'AGGETTIVO "PARALLELE"

Per tutta una serie di ragioni, è conveniente allargare l'uso dell'aggettivo "parallele", nel senso di convenire che, per due rette, anche la "coincidenza" vada pensata come caso particolare di "parallelismo".
Aggiorniamo dunque la definizione di "parallelismo", stabilendo che due rette complanari si possono dire "**parallele**" quando **non hanno alcun punto in comune, OPPURE ne hanno infiniti (= coincidono)**.
Puoi ora controllare che tutti i teoremi precedentemente stabiliti conservano la loro validità anche con questo significato più "largo" dell'aggettivo "parallele".

TEOREMA (proprietà transitiva del parallelismo)
Se due rette sono entrambe parallele ad una terza retta, allora sono parallele fra loro.

DIM. Sia $a \parallel c$, $b \parallel c$. Dico che è anche $a \parallel b$.
Infatti, se per assurdo le due rette a, b non fossero parallele tra loro, si incontrerebbero in un punto P; ma allora per P passerebbero DUE distinte rette, entrambe $\parallel$ alla c, contro il postulato di Euclide. L'assurdo trovato dimostra la tesi.



TEOREMI (*le dimostrazioni sono lasciate al lettore*)
Se due rette sono parallele, allora ogni retta del loro piano, che ne interseca una, taglierà anche l'altra
Se due rette sono parallele, allora ogni perpendicolare a una di esse sarà anche perpendicolare all'altra