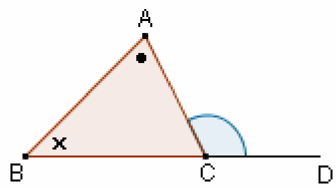
3.4 - QUESTIONI RELATIVE AGLI ANGOLI DEI TRIANGOLI E DEI POLIGONI

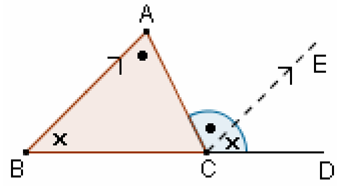
TEOREMA (TEOREMA DELL'ANGOLO ESTERNO IN FORMA FORTE)
In un triangolo, ogni angolo esterno è uguale alla somma dei due angoli interni ad esso non adiacenti.



HP $A\hat{C}D$ angolo esterno di ABC

TH $A\hat{C}D = \hat{A} + \hat{B}$

DIMOSTRAZIONE
Per il vertice C dell'angolo esterno $A\hat{C}D$ tracciamo la parallela CE al lato AB. Ora:
$A\hat{C}E = \hat{A}$ perché alterni interni rispetto alle parallele AB, CE con la trasversale AC;
$E\hat{C}D = \hat{B}$ perché corrispondenti rispetto alle parallele AB, CE con la trasversale BD.
Dunque $A\hat{C}D = A\hat{C}E + E\hat{C}D = \hat{A} + \hat{B}$, C.V.D.



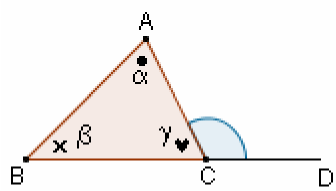
Abbiamo messo le freccette per indicare il parallelismo. Comunque, queste freccette non sono "obbligatorie"!

Capito ora perché si dimostra prima un teorema dell'Angolo Esterno "debole" e solo più tardi uno "forte"?
Perché il teorema DEBOLE serve per dimostrare i teoremi sulle RETTE PARALLELE,
ed è tramite questi ultimi che si riesce poi a dimostrare il teorema FORTE.

TEOREMA In un triangolo, la somma dei tre angoli interni è uguale a un angolo piatto (180°).

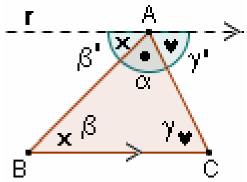
DIMOSTRAZIONE

Si può dimostrare come corollario del teorema precedente:



$\alpha+\beta+\gamma \underset{\text{teorema angolo est. "forte"}}{=} A\hat{C}D+\gamma = B\hat{C}D = 180°$

… oppure si può dimostrare come teorema a sé stante.
Per un vertice qualsiasi (noi abbiamo preso il vertice A) si traccia la parallela r al lato opposto, dopodiché si ha:



$\beta = \beta'$ (alt. int., $r \parallel BC$, trasv. AB)
$\gamma = \gamma'$ (alt. int., $r \parallel BC$, trasv. AC)
dunque $\alpha+\beta+\gamma = \alpha+\beta'+\gamma' = 180°$

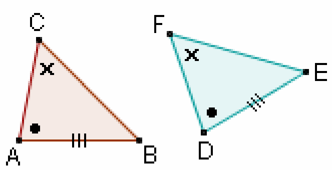
COROLLARI
- **I due angoli acuti di un triangolo rettangolo sono complementari (cioè, danno per somma 90°)**
- **In un triangolo equilatero, ogni angolo è uguale alla terza parte di un angolo piatto (= 60°)**
- **Se due triangoli hanno rispettivamente uguali due angoli, avranno uguale anche l'angolo rimanente**

Quest'ultimo corollario si giustifica "per differenza rispetto a 180°":

se, nei due tr. ABC *e* A'B'C', *si ha* $\hat{A}' = \hat{A}$ e $\hat{B}' = \hat{B}$, *allora* $\hat{C}' \underset{A'B'C'}{=} 180° - \hat{A}' - \hat{B}' = 180° - \hat{A} - \hat{B} \underset{ABC}{=} \hat{C}$

TEOREMA (Secondo Criterio Generalizzato di uguaglianza dei triangoli)
Se due triangoli hanno rispettivamente uguali un lato e due angoli, e i due angoli sono, nei triangoli, disposti allo stesso modo rispetto al lato uguale, allora quei due triangoli sono uguali.

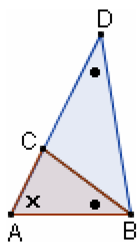
Infatti, in tal caso, si potranno applicare: prima, il corollario precedente, poi, l'ordinario Secondo Criterio.



Prendiamo i due triangoli della figura: essi hanno rispettivamente uguali un lato e due angoli, e questi sono, nei due triangoli, disposti allo stesso modo rispetto al lato uguale (in entrambi i casi, uno dei due angoli è adiacente, l'altro opposto).
In virtù del corollario precedente, possiamo dire subito che $\hat{B} = \hat{E}$
(d'altronde, direttamente: $\hat{B} = 180° - \hat{A} - \hat{C} = 180° - \hat{D} - \hat{F} = \hat{E}$)
dopodiché potremo concludere che i due triangoli sono uguali per l'ordinario 2° Criterio, avendo rispettivamente uguali un lato e i due angoli ad esso adiacenti.

OSSERVAZIONE - E' davvero ESSENZIALE che i due angoli siano "nei due triangoli, disposti allo stesso modo rispetto al lato uguale".

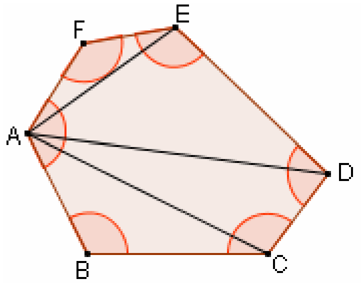
Consideriamo infatti la figura qui a destra:
In essa, i due triangoli ABC, ABD hanno rispettivamente uguali un lato ($\overline{AB}$, che è in comune) e due angoli ($\hat{A}$ che è in comune; $A\hat{B}C = \hat{D}$), ma NON sono, evidentemente, uguali.
Il fatto è che, nel triangolo ABC, i due angoli in questione sono I DUE ADIACENTI al lato $\overline{AB}$, mentre in ABD gli angoli sono UNO ADIACENTE, L'ALTRO OPPOSTO ad $\overline{AB}$.
Il teorema non è applicabile.



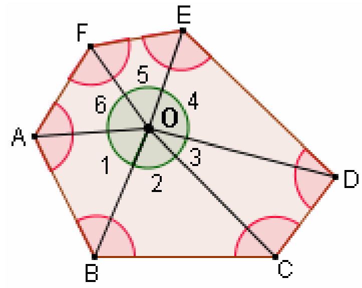
TEOREMA

La SOMMA DEGLI ANGOLI INTERNI DI UN POLIGONO convesso è uguale a tanti angoli piatti, quant'è il numero dei lati diminuito di 2.

Ad esempio, la somma degli angoli interni di un esagono è $(6-2)\cdot 180° = 4\cdot 180° = 720°$.
In generale, **la somma degli angoli interni di un poligono di n lati vale $(n-2)\cdot 180°$.**
Per la dimostrazione, si può procedere in due modi. Quale preferisci?



Ecco un esagono ABCDEF.
Se si prende un vertice qualsiasi (noi abbiamo preso A) e lo si congiunge con i vertici non consecutivi, si ottengono 4 triangoli (tanti quanti sono i lati che NON hanno un estremo in A, ossia 6–2 = 4 triangoli).
Si può osservare che la somma degli angoli interni di ABCDEF è uguale alla somma degli angoli interni di tutti e 4 questi triangoli, dunque vale $(6-2)\cdot 180° = 720°$
In generale, se i lati fossero stati n anziché 6, avremmo ottenuto $(n-2)\cdot 180°$.

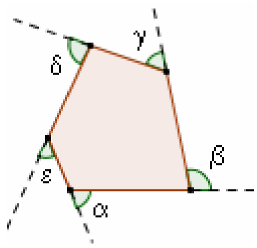


Ecco un esagono ABCDEF.
Se si prende un punto interno qualsiasi O e lo si congiunge con i vertici, si ottengono 6 triangoli (tanti quanti sono i lati).
Si può osservare che la somma degli angoli interni di ABCDEF è uguale alla somma degli angoli interni di tutti e 6 questi triangoli, diminuita però dell'angolo giro di vertice O.
Dunque tale somma vale:
$6\cdot 180° - 360° = 6\cdot 180° - 2\cdot 180° = (6-2)\cdot 180° = 720°$
In generale, se i lati fossero stati n anziché 6, avremmo ottenuto $(n-2)\cdot 180°$.

COROLLARIO La somma degli angoli interni di un quadrilatero convesso vale 360°.

La SOMMA DEGLI ANGOLI ESTERNI DI UN POLIGONO

Poiché la somma degli angoli interni di un poligono di n lati è $(n-2)\cdot 180°$, la somma degli angoli ESTERNI di un poligono di n lati misurerà
$n\cdot 180° - (n-2)\cdot 180° = \cancel{n\cdot 180°}\ \cancel{-n\cdot 180°} + 360° = 360°$.
S'intende, in questo discorso, di contare, per ciascun vertice del poligono, UN SOLO angolo esterno fra i due opposti al vertice e uguali fra loro.



Resta così dimostrato il seguente

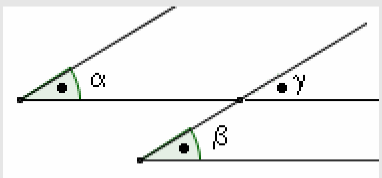
TEOREMA

Indipendentemente dal numero dei lati, la somma degli angoli ESTERNI di un poligono (prendendo un solo angolo esterno per ogni vertice) è sempre uguale ad un angolo giro (360°).

COPPIE DI ANGOLI COI LATI PARALLELI

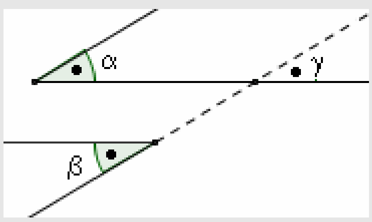
TEOREMA

Due angoli coi lati paralleli e concordi, oppure paralleli e discordi, sono uguali. Invece due angoli che abbiano due lati paralleli e concordi, e gli altri due paralleli e discordi, sono supplementari.



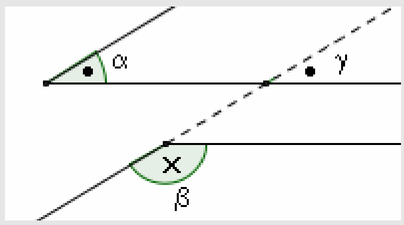
α, β hanno i **lati $\parallel$ e concordi**.
γ fa da "angolo ausiliario", fa da "ponte" fra α e β:

$\alpha \underset{\substack{\text{corrispondenti,}\\ \text{due parallele}\\ \text{con trasversale}}}{=} \gamma \underset{\substack{\text{corrispondenti,}\\ \text{due parallele}\\ \text{con trasversale}}}{=} \beta$



α, β hanno i **lati $\parallel$ e discordi**.
γ fa da "ponte" per la dimostrazione:

$\alpha \underset{\substack{\text{corrispondenti,}\\ \text{due parallele}\\ \text{con trasversale}}}{=} \gamma \underset{\substack{\text{alterni esterni,}\\ \text{due parallele}\\ \text{con trasversale}}}{=} \beta$



α, β hanno **due lati $\parallel$ e concordi, e gli altri due $\parallel$ e discordi**.

$\alpha \underset{\substack{\text{corrispondenti,}\\ \text{due parallele}\\ \text{con trasversale}}}{=} \gamma \underset{\substack{\text{coniug. esterni,}\\ \text{due parallele}\\ \text{con trasversale}}}{=} 180° - \beta$