3.5 - CENNI ALLE “GEOMETRIE NON EUCLIDEE”

Sembra davvero molto strano che
(pag. 294 e seguenti, “Perpendicolari e parallele”)

a) l’**esistenza** della **perpendicolare** (per un punto dato a una retta data),
b) l’**unicità** della **perpendicolare**,
c) e l’**esistenza** della **parallela**,

possano essere **tutte** dimostrate come **teoremi**, e che invece

d) **l’unicità della parallela,**

pur evidentissima all’intuizione, **NON si riesca a dimostrare**.

In effetti, i matematici tentarono *per secoli* di trasformare l’*assioma* dell’unicità della parallela (per un punto dato a una retta data) in *teorema*, ma **nessun tentativo di dimostrazione riuscì ad andare a buon fine**.

Capitò anche che qualche studioso ritenesse di poter cantare vittoria, e che successivamente altri matematici gli rovinassero la festa facendo vedere che era stato utilizzato, nel ragionamento, qualche enunciato … del tutto equivalente alla proposizione da dimostrare!

Notevole fu il lavoro di **Gerolamo Saccheri**, che nel suo trattato *Euclides ab Omni Naevo Vindicatus* del **1733** si propose di partire dalla negazione dell’unicità della parallela, deducendo da questa negazione parecchie conseguenze, nella speranza di giungere a una conclusione che fosse in contraddizione con gli altri assiomi:
così facendo, egli ricavò svariati enunciati bizzarri e alla fine credette (sbagliando) di aver ottenuto la contraddizione desiderata; ma in realtà, emerse ad uno studio attento che non c’era alcun conflitto logico fra quanto egli aveva dedotto e la famiglia degli assiomi euclidei, privata di quello che lui aveva provato a negare.

Si cominciò allora, da parte di qualche esponente della comunità matematica, a sospettare che **forse dal negare l’unicità della parallela non potesse nascere nessuna contraddizione**, ma anzi si potesse costruire una “geometria” stramba e tuttavia in sé coerente, non contraddittoria dal punto di vista logico.

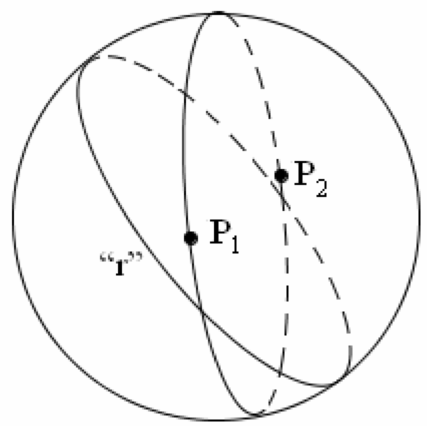
Tale idea fu sviluppata nella **prima metà del secolo XIX** da due studiosi, che lavorarono indipendentemente l’uno dall’altro, il russo Nikolai **Lobacevskij** (1793-1856) e l’ungherese Janos **Bolyai** (1802-1860); lo stesso Gauss, uno dei matematici più grandi di tutti i tempi, sostenne dopo aver letto il lavoro di Bolyai di avere intuito da sempre che quella era la strada giusta, ma di non aver pubblicato niente per evitare “le strida dei beoti”.

E finalmente nel **1868** l’italiano Eugenio **Beltrami** riuscì a escogitare un concreto **“modello di geometria non-euclidea IPERBOLICA = DELLA PLURALITA’ DELLE PARALLELE”**, ossia, servendosi di una figura chiamata “pseudosfera”, riuscì a individuare una situazione nella quale, per determinate entità chiamate convenzionalmente “punti”, “rette” e “piani”, valevano tutti gli assiomi della geometria euclidea più un ulteriore assioma che rappresentava la NEGAZIONE del Postulato di Euclide, perché, dati un “punto” e una “retta”, per il “punto” risultavano passare **INFINITE** DISTINTE **PARALLELE** alla “retta” considerata.

Ma questo è *estremamente* significativo!
Il fatto che esista nella realtà almeno un modello di geometria non euclidea dimostra in modo incontrovertibile che negando il postulato di Euclide, e conservando gli altri assiomi, NON nasce contraddizione, quindi che il postulato di Euclide NON è dimostrabile come teorema a partire dalla famiglia degli altri assiomi.

In seguito **Riemann** ideò un esempio di **geometria non-euclidea “ELLITTICA”**, nella quale, dati un “punto” e una “retta”, per il “punto” non risultava passare **NESSUNA PARALLELA** alla “retta” considerata.

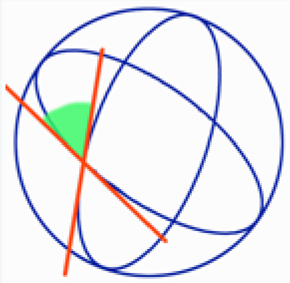
La geometria ellittica di Riemann non è difficile da descrivere.
Immaginiamo una sfera, e chiamiamo “piano” la sua superficie, “retta” ogni sua circonferenza massima, “punto” ogni entità costituita da una coppia di suoi punti diametralmente opposti.
Si vede chiaramente che, data una “retta” e un “punto”, per il “punto” non passa NESSUNA “retta” parallela alla “retta” considerata.

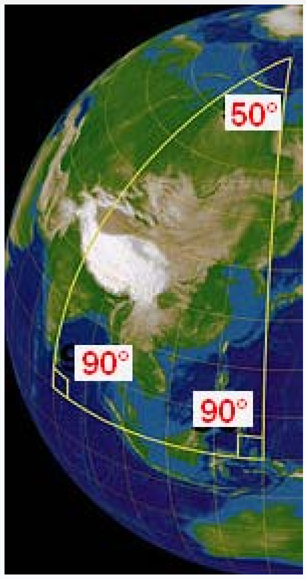


I punti diametralmente opposti P_1, P_2
formano un’unica “entità-punto”, cui possiamo dare il nome “P”.
La figura mostra che per “P”
non esiste nessuna “retta” (=circonferenza massima)
che sia parallela alla “retta” indicata con “r”.

E' normale, in una geometria *non* euclidea, che possano cambiare, rispetto alla geometria euclidea, quei teoremi i quali dipendono dall'assioma che lì viene modificato.

Nella **geometria sferica** si intende per "angolo" quell'angolo euclideo che è formato dalle due rette euclidee le quali sono tangenti a due circonferenze massime ("rette" della geometria sferica) laddove queste si tagliano.
Vedi le figure qui accanto, tratte (salvo qualche ritocco) da Wikipedia.



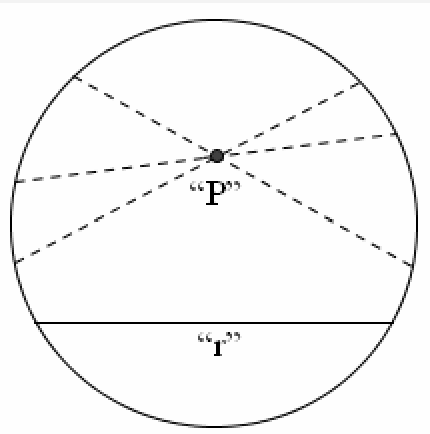


Bene:
la somma dei tre "angoli" di un "triangolo" NON è, in questa interpretazione, di 180°.
D'altra parte, un'analisi attenta mostra che, tolto l'assioma di unicità della parallela, gli altri assiomi della geometria euclidea (opportunamente "interpretati") sono veri in questo contesto.

C'è tuttavia, nel caso della geometria *ellittica* di cui la geometria sferica è uno dei possibili modelli, qualche eccezione: la famiglia dei cosiddetti "assiomi dell'ordine", che nella Geometria ellittica non valgono, mentre valevano nella geometria *iperbolica* la quale dunque, ai fini del nostro discorso, è più significativa.

Ritornando alla geometria *iperbolica*, per la quale valgono invece, ribadiamolo, proprio TUTTI gli assiomi della geometria euclidea, TRANNE l'assioma dell'unicità della parallela, un suo modello facile da comprendere è il "**modello di Klein**" che andiamo qui di seguito ad esporre sommariamente, non entrando per brevità in troppi particolari ed approfondimenti.

Chiamiamo "piano" l'insieme dei punti interni ad una circonferenza, "punto" ogni punto interno alla circonferenza, "retta" ogni corda della circonferenza, pensata senza i due estremi.
Per questo "piano", questi "punti" e queste "rette" sono veri, come si può pazientemente controllare, tutti gli assiomi della normale geometria euclidea TRANNE l'assioma dell'unicità della parallela, che è invece sostituito da quest'altro:
data una "retta" e un "punto" fuori di essa, per quel "punto" passano INFINITE "rette" parallele alla retta in questione, che cioè non la intersecano.



Nella figura, ecco un "piano" di Klein,
una "retta" e un "punto" fuori di essa.
Sono anche disegnate, tratteggiate,
tre fra le infinite "rette"
che passano per quel "punto"
e sono parallele a quella "retta".

L'importanza delle geometrie non euclidee è enorme,
anche in relazione a teorie interpretative del mondo fisico.
A questo proposito diciamo solo che la geometria iperbolica ha un ruolo essenziale nella Relatività Generale di Einstein.

"There are only two ways to live your life.
One is as though nothing is a miracle.
The other is as though everything is" .
(Dubbiamente) attribuita ad Einstein.
Indubbiamente degna di rifletterci sopra … Tu, cosa ne dici?