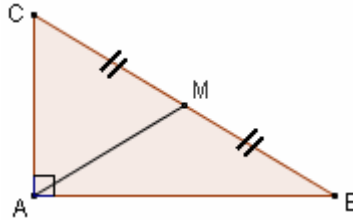


3.6 - ALCUNI TEOREMI SUL TRIANGOLO RETTANGOLO

TEOREMA

In un triangolo rettangolo,
la mediana
relativa all'ipotenusa
è metà dell'ipotenusa stessa.



HP:

$$\widehat{CAB} = 90^\circ; \overline{BM} = \overline{MC}$$

TH:

$$\overline{AM} = \frac{1}{2} \overline{BC} \quad (= \overline{BM} = \overline{MC})$$

DIM.

Costruzione:
prolungo la mediana \overline{AM} di un segmento $\overline{MD} = \overline{AM}$.
Congiungo D con B.

I due triangoli AMC e DMB sono uguali per il 1° Criterio:

$\overline{MC} = \overline{BM}$ per ipotesi,
 $\overline{AM} = \overline{MD}$ per costruzione,
 $\widehat{AMC} = \widehat{DMB}$ perché opposti al vertice.
Quindi, in particolare, si ha $\widehat{CAM} = \widehat{D}$.

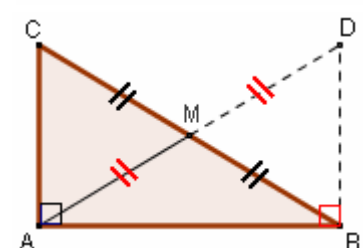
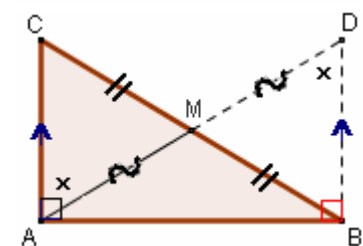
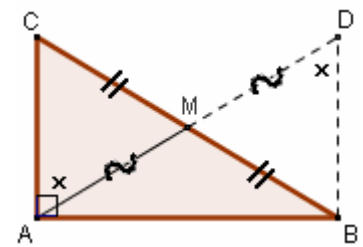
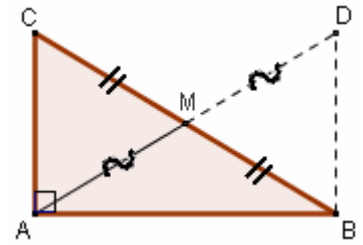
E poiché \widehat{CAM} e \widehat{D}
sono in posizione di alterni interni
rispetto alle due rette BD e AC con la trasversale AD,
dal fatto che siano uguali si deduce che $BD \parallel AC$.

Ma allora, essendo $\widehat{CAB} = 90^\circ$,
sarà retto anche \widehat{DBA} .

Se adesso confrontiamo i due triangoli ABC e ABD, vediamo che hanno

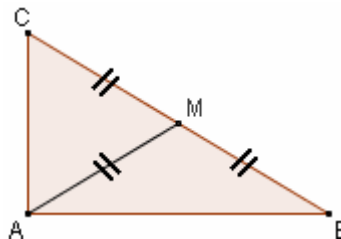
$\widehat{CAB} = \widehat{DBA} = 90^\circ$; \overline{AB} in comune;
 $\overline{AC} = \overline{BD}$ per l'uguaglianza $\widehat{AMC} = \widehat{DMB}$
dunque sono uguali per il 1° Criterio e in particolare $\overline{BC} = \overline{AD}$.

$$\text{E perciò } \overline{AM} = \overline{MD} = \frac{1}{2} \overline{AD} = \frac{1}{2} \overline{BC} = \overline{BM} = \overline{MC}, \text{ C.V.D.}$$



TEOREMA

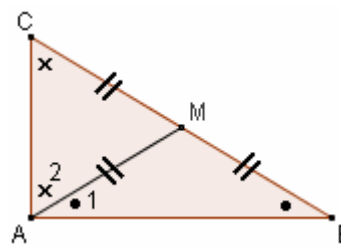
Se in un triangolo
la mediana relativa ad un lato
è metà del lato stesso,
allora quel triangolo è rettangolo
(e il lato in questione ne è l'ipotenusa).

HP: $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{MC}$ TH: $\widehat{CAB} = 90^\circ$

DIMOSTRAZIONE

I triangoli AMB, AMC sono isosceli per HP;
segue (vedi figura qui a fianco)
 $\widehat{A}_1 = \widehat{B}$, $\widehat{A}_2 = \widehat{C}$.

Ma la somma di tutti e quattro gli angoli
 \widehat{A}_1 , \widehat{B} , \widehat{A}_2 , \widehat{C} dà 180° ;
quindi la somma $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2$
(che costituisce poi l'angolo \widehat{A})
darà $180^\circ/2 = 90^\circ$.



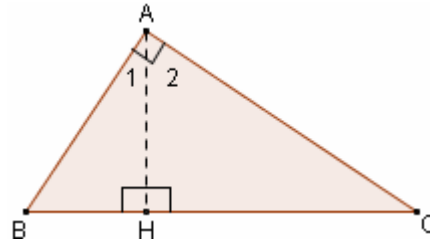
Schematicamente:

$$\begin{aligned} \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} &= 180^\circ \\ \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 + \widehat{B} + \widehat{C} &= 180^\circ \\ \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 + \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 &= 180^\circ \\ 2\widehat{A}_1 + 2\widehat{A}_2 &= 180^\circ \\ 2(\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2) &= 180^\circ \\ \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 &= 90^\circ \quad \text{C.V.D.} \end{aligned}$$

♥ Gli studenti tendono ad enunciare l'ultimo teorema in modo scorretto, dicendo che "se in un triangolo la mediana relativa all'ipotenusa è metà dell'ipotenusa stessa, allora il triangolo è rettangolo". ... Eh, no! Se si utilizza fin dall'inizio il termine "ipotenusa", sembra che sia noto già in partenza che il triangolo è rettangolo!

TEOREMA

Se in un triangolo rettangolo si traccia l'altezza relativa all'ipotenusa, questa lo suddivide in due triangoli, simili fra loro e con quello di partenza (due triangoli sono "simili" quando hanno gli angoli rispettivamente uguali).



HP

ABC rettangolo in \hat{A}
 $AH \perp BC$

TH

ABC, AHB, AHC hanno gli angoli rispettivamente uguali

DIM.

Il triangolo ABH è rettangolo in \hat{H} , dunque i suoi due angoli acuti \hat{B} e \hat{A}_1 sono complementari. Ma anche \hat{A}_2 è complementare di \hat{A}_1 : dunque $\hat{A}_2 = \hat{B}$ perché complementari dello stesso angolo \hat{A}_1 .

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\hat{A}_2} & \stackrel{=}{\downarrow} & 90^\circ - \hat{A}_1 & \stackrel{=}{\downarrow} & \boxed{\hat{B}} \\ & & \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = & \text{angoli acuti} & \\ & & = \hat{BAC} = 90^\circ & \text{del triangolo} & \\ & & & \text{rettangolo} & \\ & & & \text{AHB} & \end{array}$$

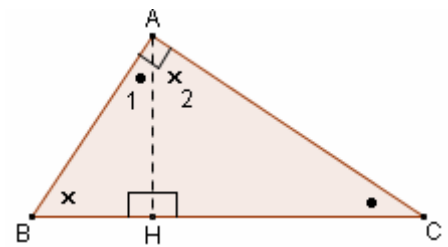
Analogamente, $\hat{A}_1 = \hat{C}$ perché complementari dello stesso angolo \hat{A}_2 .

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\hat{A}_1} & \stackrel{=}{\downarrow} & 90^\circ - \hat{A}_2 & \stackrel{=}{\downarrow} & \boxed{\hat{C}} \\ & & \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = & \text{angoli acuti} & \\ & & = \hat{BAC} = 90^\circ & \text{del triangolo} & \\ & & & \text{rettangolo} & \\ & & & \text{AHC} & \end{array}$$

La situazione è pertanto quella illustrata nella figura qui a fianco.

La tesi è dimostrata!

I tre triangoli ABC, AHB, AHC hanno gli angoli rispettivamente uguali (ognuno dei tre ha un angolo retto, un angolo "pallino" e un angolo "crocetta"): sono dunque "simili".



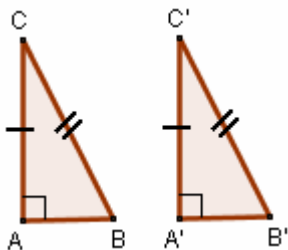
TEOREMA ("Criterio Particolare di Uguaglianza dei Triangoli Rettangoli")

Se due triangoli rettangoli hanno rispettivamente uguali l'ipotenusa e un cateto, allora sono uguali.

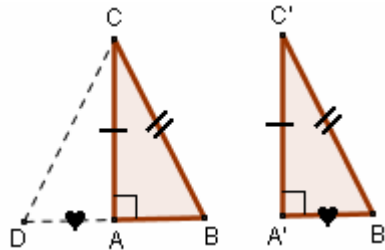
OSSERVAZIONE

Notare che in questo teorema si suppone l'uguaglianza di due lati e di un angolo, ma quest'ultimo ... non è l'angolo compreso.

Si tratta perciò di un teorema *nuovo*, non coincidente con nessuno dei tre Criteri di uguaglianza già noti.



HP
 $\hat{BAC} = \hat{B'A'C'} = 90^\circ$
 $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$
 TH
 $ABC = A'B'C'$



♥ Nei testi in Inglese, questo enunciato è denominato "the Hypotenuse-Leg Theorem".

Side = lato
 Leg = cateto

DIM.

Prolungiamo il segmento \overline{AB} , dalla parte di A, di un segmento $\overline{AD} = \overline{A'B'}$. Confrontando adesso i due triangoli ADC , $A'B'C'$, vediamo che sono uguali per il Primo Criterio (l'angolo \hat{DAC} è evidentemente retto perché supplementare dell'angolo retto \hat{BAC}). Ma allora è, in particolare, $\overline{DC} = \overline{B'C'}$; era poi $\overline{B'C'} = \overline{BC}$ per ipotesi, per cui si ha $\overline{DC} = \overline{BC}$. Dunque il triangolo BDC è isoscele; perciò \overline{CA} , che ne è altezza relativa alla base, farà anche da mediana: $AD = AB$. Ma AD era stato costruito uguale ad $A'B'$; ne consegue $AB = A'B'$. E a questo punto, se andiamo a confrontare i due triangoli ABC e $A'B'C'$, li possiamo dire uguali per il Primo Criterio (o per il Terzo, indifferentemente). La tesi è dimostrata.