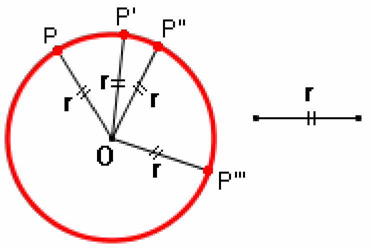
4.2 - LUOGHI GEOMETRICI

Definizione di "LUOGO GEOMETRICO"

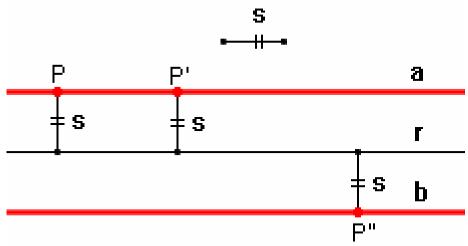
Si dice "**luogo geometrico**"
l'insieme di tutti e soli i punti che godono di una determinata proprietà geometrica.

Esempi

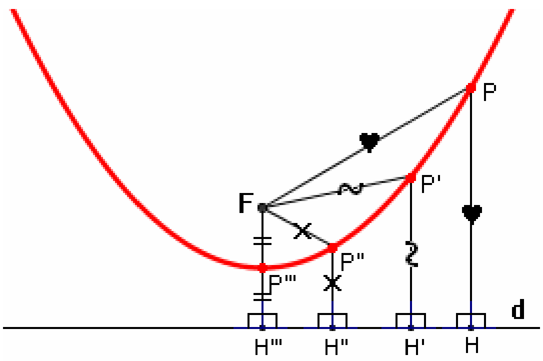
1)
Il luogo geometrico dei punti del piano,
la cui distanza da un punto fissato O
è uguale ad un segmento assegnato r,
è chiamato
"**circonferenza**".



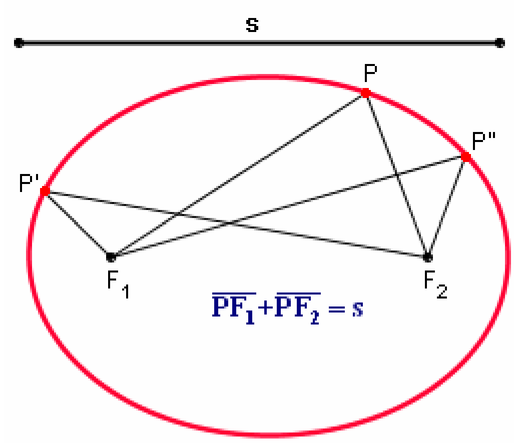
2)
Il luogo geometrico dei punti del piano,
la cui distanza da una retta fissata r
è uguale ad un segmento fissato s,
è costituito da
due rette parallele.



3)
Il luogo dei punti P del piano,
equidistanti (= aventi ugual distanza)
da un punto fisso F (detto "fuoco")
e da una retta fissa d (detta "direttrice"),
è una curva chiamata
"**parabola**".



4)
Il luogo dei punti P del piano,
per i quali è costante la somma $\overline{PF_1} + \overline{PF_2}$
delle distanze da due punti fissi F_1, F_2 **(detti "fuochi")**
è una curva chiamata
"**ellisse**".



APPROFONDIMENTO LOGICO/LINGUISTICO

Siamo partiti scrivendo che
si dice "luogo geometrico" l'insieme di
TUTTI E SOLI i punti che godono di una determinata proprietà geometrica.
In questa definizione, cosa vuol dire, precisamente, "TUTTI E SOLI"?

Dunque: noi abbiamo un certo insieme I di punti, e abbiamo una certa proprietà geometrica G.
Affermare che I è il **luogo** dei punti che godono della proprietà G significa sostenere DUE cose:

♪ **SOLO** i punti che godono della proprietà G appartengono a I, ossia:

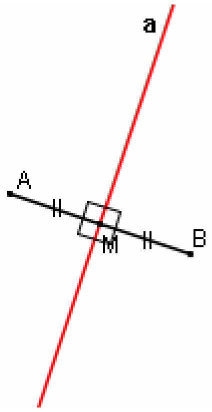
- se un punto NON gode della proprietà G, allora NON può appartenere a I

  oppure, volendo (è equivalente, in termini logici):

- **se un punto appartiene a I allora gode della proprietà G**

♫ **TUTTI** i punti che godono della proprietà G appartengono a I, che è poi come dire:
se un punto gode della proprietà G, allora appartiene a I

L’ASSE DI UN SEGMENTO



DEFINIZIONE
Si dice “asse” di un segmento
la perpendicolare a quel segmento
condotta per il suo punto medio.

L’asse di un segmento,
ossia la perpendicolare
a quel segmento
nel suo punto medio:

$a \perp AB,$

$\overline{AM} = \overline{MB}$

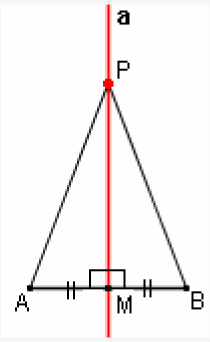
L’ASSE DI UN SEGMENTO, VISTO COME LUOGO GEOMETRICO

L’asse di un segmento può anche essere visto come *luogo geometrico*.
Vale infatti il seguente

TEOREMA
L’asse di un segmento è il luogo dei punti del piano,
aventi la proprietà di essere equidistanti dagli estremi del segmento stesso.

I) PRIMA PARTE della dimostrazione:
vogliamo dimostrare che
se un punto appartiene all’asse di un segmento,
allora è equidistante dagli estremi di quel segmento.

Sia dunque $\overline{AB}$ *un segmento,* a *il suo asse, e sia* $P \in a$.
Tracciate le distanze $\overline{PA}, \overline{PB}$ *del punto* P *dagli estremi di* $\overline{AB}$ *, vogliamo far vedere che* $\overline{PA} = \overline{PB}$



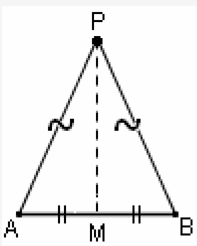
HP: a asse di $\overline{AB}$ $(a \perp \overline{AB}, \overline{AM} = \overline{MB})$
$P \in a$

TH: $\overline{PA} = \overline{PB}$

Semplicissimo. I due triangoli PMA, PMB sono uguali per il 1° Criterio; segue la tesi.

II) SECONDA PARTE della dimostrazione:
vogliamo dimostrare che
se un punto è equidistante dagli estremi di un segmento,
allora appartiene al suo asse.

Sia dunque $\overline{AB}$ *un segmento,* P *un punto equidistante dai suoi estremi*: $\overline{PA} = \overline{PB}$.
Vogliamo far vedere che P *appartiene all’asse di* $\overline{AB}$.



HP: $\overline{PA} = \overline{PB}$

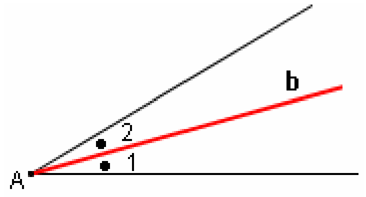
TH: P appartiene all’asse di $\overline{AB}$

Congiungiamo P col punto medio M di $\overline{AB}$.
Ci basterà far vedere che risulta $PM \perp AB$.
Ma è facilissimo!
Il triangolo ABP è isoscele per ipotesi,
quindi $\overline{PM}$, che per costruzione è mediana relativa alla base, fa anche da altezza.
La tesi è dimostrata.

LA BISETTRICE DI UN ANGOLO

Abbiamo a suo tempo introdotto la nozione di “bisettrice di un angolo” tramite la seguente

DEFINIZIONE
Si dice bisettrice di un angolo la semiretta che, partendo dal vertice, divide l’angolo in due parti uguali.



La bisettrice di un angolo, ossia la semiretta che lo “biseca”, che lo taglia in metà:
$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

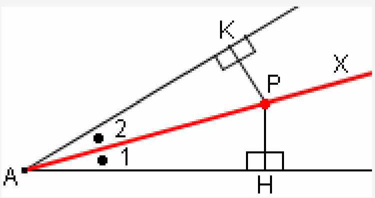
LA BISETTRICE DI UN ANGOLO, VISTA COME LUOGO GEOMETRICO

Ora, la bisettrice può anche essere vista come *luogo geometrico*.
Vale infatti il seguente

TEOREMA
La bisettrice di un angolo è il luogo dei punti dell’angolo, aventi la proprietà di essere equidistanti dai lati dell’angolo.

I) PRIMA PARTE della dimostrazione:
se un punto appartiene alla bisettrice di un angolo, allora è equidistante dai lati di quell’angolo.

Sia dunque $\hat{A}$ *un angolo, e sia* P *un punto appartenente alla sua bisettrice.*
Tracciate le due distanze $\overline{PH}, \overline{PK}$ *del punto* P *dai lati di* $\hat{A}$, *vogliamo far vedere che* $\overline{PH} = \overline{PK}$.



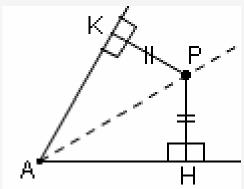
HP: AX bisettrice di $\hat{A}$ $(\hat{A}_1 = \hat{A}_2)$
$P \in AX$
$PH \perp AH;\ PK \perp AK$

TH: $\overline{PH} = \overline{PK}$

Basta confrontare i due triangoli $PHA,\ PKA$.
Essi hanno $\overline{AP}$ in comune, $\hat{H} = \hat{K} = 90°$ e $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ per ipotesi;
quindi sono uguali per il 2° Criterio Generalizzato. Segue la tesi.

II) SECONDA PARTE della dimostrazione:
se un punto di un angolo è equidistante dai lati dell’angolo stesso, allora appartiene alla sua bisettrice.

Prendiamo all’interno di un angolo $\hat{A}$ *un punto* P, *che sia equidistante dai lati dell’angolo stesso, poi tracciamo la semiretta* AP *proponendoci di dimostrare che fa da bisettrice per l’angolo* $\hat{A}$.

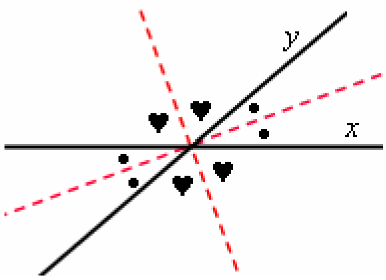


HP: $\overline{PH} = \overline{PK}$ $(PH \perp AH;\ PK \perp AK)$

TH: P appartiene alla bisettrice dell’angolo $\hat{A}$,
cioè, tracciata la semiretta AP, si ha $P\hat{A}H = P\hat{A}K$

I triangoli $PAH,\ PAK$ sono uguali per il Criterio Particolare di Uguaglianza dei Triangoli Rettangoli (ipotenusa $\overline{AP}$ in comune, $\overline{PH} = \overline{PK}$ per ipotesi).
Segue la tesi.

OSSERVAZIONE
Il luogo dei punti del piano, equidistanti da due rette incidenti x, y,
è costituito da **una coppia di rette**, che bisecano i quattro angoli, a due a due opposti al vertice, formati da x e y.



Quando si parla di “bisettrice” di un angolo, a volte si specifica, o si deve capire dal contesto, che ci si intende riferire a tutta la “**retta bisettrice**”, cioè a quella retta che contiene le due semirette bisettrici dell’angolo in questione e del suo opposto al vertice.