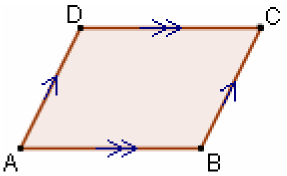
4.3 - PARALLELOGRAMMI IN GENERALE

DEFINIZIONE

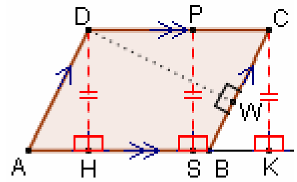
Si dice
“**parallelogrammo**”
un **quadrilatero**
coi lati opposti
paralleli.



$DC \parallel AB$
$BC \parallel AD$

Le **coppie di freccette, o di doppie freccette,**
servono per ribadire:
“noi sappiamo che queste due rette
sono parallele fra loro”.
♥ **Non sono “obbligatorie”**, tali freccette;
sono però utili, per fissare le idee,
QUANDO GIÀ SI SA,
per ipotesi o per dimostrazione precedente,
che le rette in questione sono parallele.

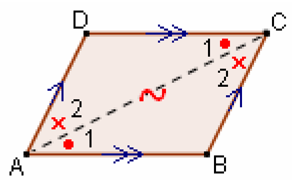
In un parallelogrammo, si dice “**altezza**” la distanza fra due lati opposti, assunti come “**basi**”. La figura qui a fianco mostra un parallelogrammo ABCD e tre segmenti ($\overline{DH}$, $\overline{PS}$, $\overline{CK}$), ognuno dei quali ha il diritto di essere chiamato “altezza” per il parallelogrammo relativamente alla coppia di basi $\overline{AB}$, $\overline{DC}$.
Le altezze di un parallelogrammo, relative ad una data coppia di basi, sono tutte uguali fra loro (distanze di due parallele).
Di norma, è comunque più frequente che un’altezza venga tracciata a partire da uno dei quattro vertici.



Tre fra le infinite altezze, tutte uguali fra loro, relative alla coppia di basi $\overline{AB}$, $\overline{DC}$

La figura mostra anche un’altezza ($\overline{DW}$) *relativa alla coppia di basi* $\overline{BC}$, $\overline{AD}$

TEOREMA
In ogni parallelogrammo,
i lati opposti sono uguali.



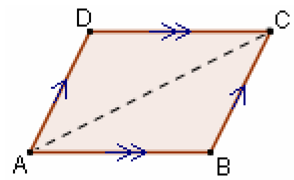
HP
ABCD parallelogrammo

TH
$\overline{AB} = \overline{DC}; \ \overline{AD} = \overline{BC}$

DIM.
Tracciamo la diagonale $\overline{AC}$
e confrontiamo ABC, ADC.
Essi sono uguali per il 2° Criterio avendo:
- $\overline{AC}$ in comune
- $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$ (alt. int., $DC \parallel AB$ per HP, trasv. AC)
- $\hat{A}_2 = \hat{C}_2$ (alt. int., $BC \parallel AD$ per HP, trasv. AC).

Segue la tesi.

TEOREMA
In ogni parallelogrammo,
gli angoli opposti sono uguali.

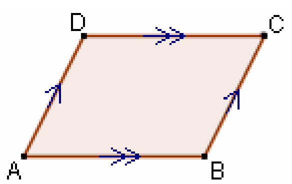


HP
ABCD parallelogrammo

TH
$\hat{A} = \hat{C}; \ \hat{B} = \hat{D}$

DIM.
Come per il Teorema precedente, si traccia la diag. $\overline{AC}$
e si confrontano ABC, ADC dimostrandoli uguali.
Segue $\hat{B} = \hat{D}$;
è poi $\hat{A} = \hat{C}$ perché somme di angoli
che abbiamo già dimostrati uguali
(oppure, la tesi $\hat{A} = \hat{C}$ potrebbe essere provata
tracciando l’altra diagonale $\overline{BD}$ e confrontando
i due triangoli in cui il quadrilatero ne viene spezzato).

TEOREMA
In ogni parallelogrammo,
gli angoli adiacenti a ciascun lato
sono supplementari.



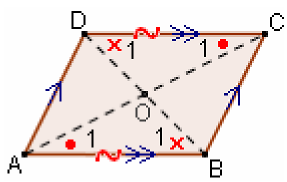
HP
ABCD parallelogrammo

TH
$\hat{A} + \hat{D} = 180°; \ \hat{B} + \hat{C} = 180°;$
$\hat{A} + \hat{B} = 180°; \ \hat{C} + \hat{D} = 180°$

DIM.

Semplicissimo!
Basta ricordare che
date due rette parallele ed una trasversale che le taglia,
gli angoli coniugati interni sono supplementari.

TEOREMA
In ogni parallelogrammo,
le diagonali si tagliano
scambievolmente per metà.



HP
ABCD parallelogrammo

TH
$\overline{AO} = \overline{OC}; \ \overline{BO} = \overline{OD}$

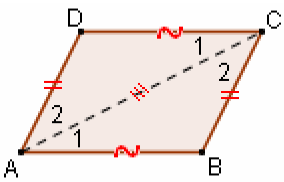
DIM.
Confrontiamo AOB, COD.
Essi sono uguali per il 2° Criterio avendo:
- $\overline{AB} = \overline{DC}$ perché già abbiamo dimostrato che in un parallelogrammo i lati opposti sono uguali;
- $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$ (alterni interni, $DC \parallel AB$ per HP, trasv. AC)
- $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$ (alterni interni, $DC \parallel AB$ per HP, trasv. BD)

Segue la tesi.

I quattro teoremi precedenti esprimevano altrettante PROPRIETA' DEI PARALLELOGRAMMI;
i quattro teoremi che seguono esprimono invece

CONDIZIONI SUFFICIENTI PER POTER CONCLUDERE
CHE UN QUADRILATERO E' UN PARALLELOGRAMMO

TEOREMA
Se un quadrilatero ha i lati opposti uguali, allora è un parallelogrammo.



HP
$\overline{AB} = \overline{DC};\ \overline{AD} = \overline{BC}$

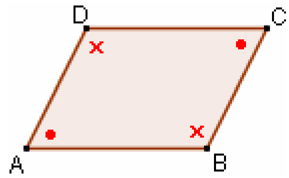
TH
ABCD parallelogrammo

DIM.
Tracciamo la diagonale AC
e confrontiamo i due triangoli ABC, ADC:
essi sono uguali per il 3° Criterio.
In particolare, si ha $\widehat{A}_1 = \widehat{C}_1$;
ma essendo questi due angoli alterni interni
rispetto alle due rette DC e AB con la trasv. AC,
segue $DC \parallel AB$.

Sempre dall'uguaglianza dei due triangoli
ABC, ADC, si trae $\widehat{A}_2 = \widehat{C}_2$;
ma essendo questi due angoli alterni interni
rispetto alle due rette BC e AD con la
trasversale AC, segue $BC \parallel AD$.

Perciò il quadrilatero ABCD
ha i lati opposti paralleli:
la tesi è dimostrata.

TEOREMA
Se un quadrilatero ha gli angoli opposti uguali, allora è un parallelogrammo.



HP
$\widehat{A} = \widehat{C};\ \widehat{B} = \widehat{D}$

TH
ABCD parallelogrammo

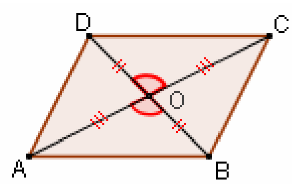
DIM.
E' noto che la somma degli angoli interni
di ogni quadrilatero vale 360°.
Ma per HP gli angoli del nostro quadrilatero
sono uguali a 2 a 2
(due angoli "puntino" e due angoli "crocetta"); quindi
la somma "puntino"+"crocetta" darà $360°/2 = 180°$:

$$\begin{gathered}\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}=360° \\ \widehat{A}+\widehat{D}+\widehat{A}+\widehat{D}=360° \\ 2\widehat{A}+2\widehat{D}=360° \\ 2\left(\widehat{A}+\widehat{D}\right)=360° \\ \widehat{A}+\widehat{D}=180°\end{gathered}$$

Ma $\widehat{A}$ e $\widehat{D}$ sono in posizione di coniugati interni
rispetto alle due rette AB e DC con la trasversale AD;
essendo supplementari, ne consegue $DC \parallel AB$.

Si ha poi $\widehat{A}+\widehat{B}=\widehat{A}+\widehat{D}=180°$, da cui $BC \parallel AD$.

TEOREMA
Se un quadrilatero ha le diagonali che si tagliano scambievolmente per metà, allora è un parallelogrammo.



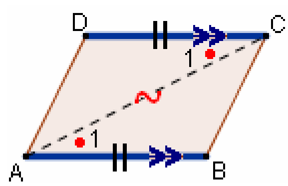
HP
$\overline{AO} = \overline{OC};\ \overline{BO} = \overline{OD}$

TH
ABCD parallelogrammo

DIM.
I due triangoli AOB, COD sono uguali
per il 1° Criterio: infatti hanno
$A\widehat{O}B = C\widehat{O}D$ perché opposti al vertice;
$\overline{AO} = \overline{OC}$ per ipotesi;
$\overline{BO} = \overline{OD}$ per ipotesi.
Dall'uguaglianza dei due triangoli considerati
discende in particolare che $\overline{DC} = \overline{AB}$.
Confrontando analogamente i triangoli AOD, BOC,
li si dimostra uguali per il 1° Criterio
e se ne trae in particolare che $\overline{BC} = \overline{AD}$.

ABCD ha i lati opposti a 2 a 2 uguali:
è dunque un parallelogrammo,
in virtù di un teorema dimostrato in precedenza.

TEOREMA
Se un quadrilatero ha due lati opposti uguali e paralleli, allora è un parallelogrammo.



HP
$\overline{AB} = \overline{DC}$
$AB \parallel DC$

TH
ABCD parallelogrammo

DIM.
Tracciamo la diagonale $\overline{AC}$
e confrontiamo i due triangoli ABC, ADC: essi hanno
$\overline{AC}$ in comune;
$\overline{AB} = \overline{DC}$ per ipotesi;
$\widehat{A}_1 = \widehat{C}_1$ perché angoli alt. int. formati dalle due rette AB e DC, parallele per HP, con la trasv. AC.
Dunque è $ABC = ADC$ per il 1° Criterio;
se ne deduce, in particolare, che $\overline{BC} = \overline{AD}$.

Ma allora il quadrilatero ABCD
ha i lati opposti a due a due uguali:
è dunque un parallelogrammo,
in virtù di un teorema precedentemente acquisito.