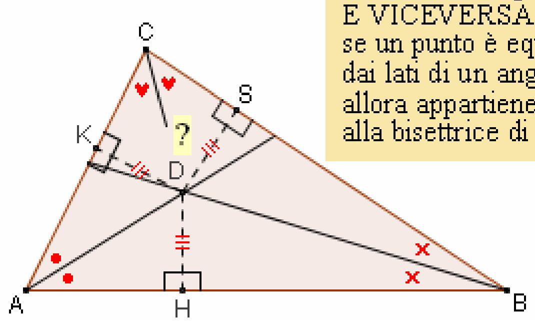
5.3 - PUNTI NOTEVOLI DI UN TRIANGOLO

TEOREMA
In un triangolo, le bisettrici dei tre angoli interni passano tutte per uno stesso punto (tale punto viene chiamato INCENTRO).

La figura mostra:
un triangolo ABC*,*
la bisettrice dell'angolo $\hat{A}$*,*
la bisettrice dell'angolo $\hat{B}$ *e …*
… UN PEZZO della bisettrice dell'angolo $\hat{C}$*,*
con accanto un bel "punto interrogativo".
Certo, perché la questione che ci poniamo è:
ma questa terza bisettrice, passerà anch'essa
per il punto nel quale si incontrano le prime due?
Mumble, mumble …



Occorre ricordare che
ogni punto della bisettrice
è equidistante
dai lati dell'angolo,
E VICEVERSA
se un punto è equidistante
dai lati di un angolo,
allora appartiene
alla bisettrice di questo

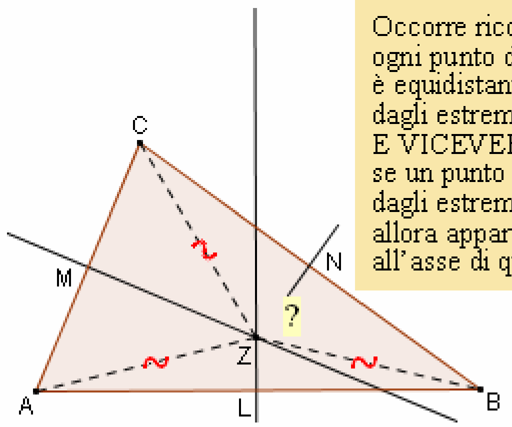
Dimostrazione

Tracciamo DUE SOLTANTO delle tre bisettrici, ad esempio quelle dei due angoli $B\hat{A}C$ e $A\hat{B}C$.
Esse si taglieranno certamente (NOTA); chiamiamo, per fissare le idee, D il loro punto di intersezione.
Vogliamo far vedere che anche la rimanente bisettrice (quella dell'angolo $A\hat{C}B$) passa per D.
Tracciamo a tal fine le distanze del punto D dai tre lati del triangolo: siano DH, DK, DS tali distanze.
Poiché D è un punto della bisettrice dell'angolo $B\hat{A}C$, D è equidistante dai lati di tale angolo:
vale a dire, si ha $DK = DH$.
Poiché però **D appartiene anche alla bisettrice dell'angolo $A\hat{B}C$,**
D è equidistante anche dai lati di quest'ultimo angolo: $DH = DS$.
Ne consegue che $DK = DS$; ma **ciò significa che D è equidistante dai lati dell'angolo $A\hat{C}B$**,
e **pertanto** che **D appartiene alla bisettrice dell'angolo $A\hat{C}B$**.
Perciò anche tale terza bisettrice, qualora venisse tracciata completamente, passerebbe per D, c.v.d.

NOTA
Infatti, poiché la somma $B\hat{A}C + A\hat{B}C$ *è <180°, a maggior ragione sarà <180° la somma delle metà di questi due angoli; perciò le due bisettrici tracciate non possono essere parallele, perché non formano con la trasversale* AB *angoli coniugati interni supplementari.*

TEOREMA
In un triangolo, gli assi dei tre lati passano per uno stesso punto (chiamato CIRCOCENTRO).

La figura mostra: un triangolo ABC*,*
l'asse del lato AB*, l'asse del lato* AC *e …*
UN PEZZO dell'asse del lato BC*,*
affiancato da un bel "punto interrogativo".
Infatti ci stiamo domandando:
ma questo terzo asse, passerà anch'esso
per il punto nel quale si incontrano i primi due?
Chissà???



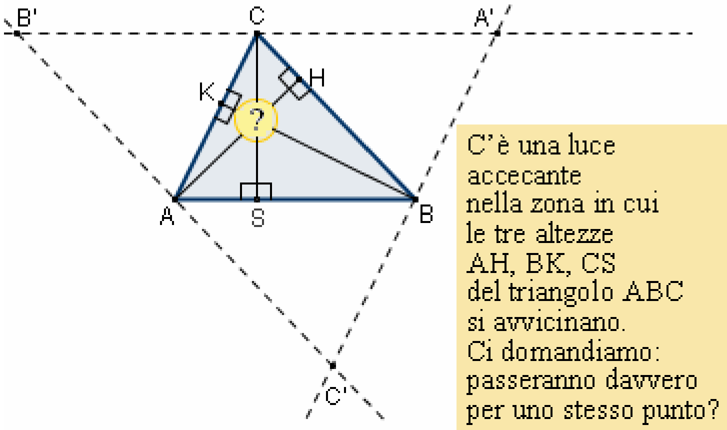
Occorre ricordare che
ogni punto dell'asse
è equidistante
dagli estremi del segmento,
E VICEVERSA
se un punto è equidistante
dagli estremi di un segmento,
allora appartiene
all'asse di questo

Dimostrazione
Analoga a quella relativa alle bisettrici.
Tracciamo gli assi dei due lati AB e AC.
Tali due assi, essendo perpendicolari a due rette che si tagliano, si taglieranno anch'essi (lo si può facilmente dimostrare *per assurdo*):
sia dunque Z il loro punto d'intersezione.
Z appartiene all'asse di AB, **quindi è equidistante dagli estremi di AB** (**$ZA = ZB$**);
ma **Z appartiene pure all'asse di AC**, per cui $ZA = ZC$**.**
Ne consegue che $ZB = ZC$**, quindi** che **Z è equidistante dagli estremi del segmento BC**,
e pertanto che **Z appartiene all'asse di BC**.
Di conseguenza anche tale TERZO ASSE dovrà passare per il punto Z in cui si tagliavano i primi due,
c.v.d.

TEOREMA
In un triangolo, le tre altezze passano tutte per uno stesso punto (detto ORTOCENTRO).

Dimostrazione

Sia ABC un triangolo,
e siano AH, BK, CS le sue tre altezze.
Mi propongo di dimostrare che AH, BK, CS passano tutte per uno stesso punto.
A tale scopo, effettuo la seguente costruzione:
traccio per i tre vertici A, B, C
le parallele ai lati opposti BC, AC, AB,
indicando con A', B' e C' i punti
in cui tali rette a due a due si intersecano.
Considero poi i quadrilateri $ABCB'$ e $ABA'C$:
sono due parallelogrammi, per cui si ha
$B'C = AB$ e $AB = CA'$.



Ne consegue che $B'C = CA'$ (cioè, che C è il punto medio del segmento $B'A'$).
Inoltre CS, essendo perpendicolare ad AB, è pure perpendicolare alla sua parallela $B'A'$.
In definitiva, CS è perpendicolare a $B'A'$ nel suo punto medio, quindi è l'asse di $B'A'$!!!
E in modo analogo, si dimostra che AH e BK sono gli assi di $B'C'$ e di $C'A'$ rispettivamente.
Ma allora **le tre rette AH, BK e CS, che fanno da altezze per il triangolo di partenza ABC**, **fanno contemporaneamente da assi per l'altro triangolo $A'B'C'$**.
E un teorema già dimostrato ci assicura che in ogni triangolo gli assi dei tre lati passano tutti per un medesimo punto !!!

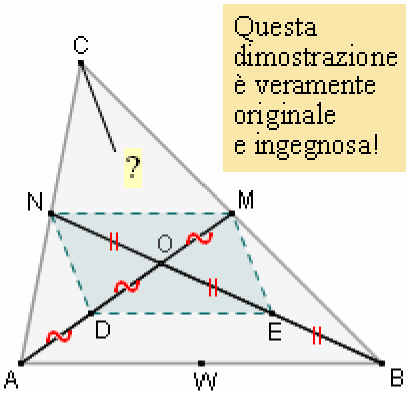
TEOREMA
In un triangolo, le mediane dei tre lati passano tutte per un medesimo punto.
Tale punto (detto BARICENTRO) ha inoltre la proprietà di dividere ciascuna mediana in due parti tali che quella contenente il vertice è doppia dell'altra.

Dimostrazione

Sia ABC un triangolo, siano AM e BN due delle sue tre mediane,
e sia O il punto di intersezione di queste
(NOTA: che due mediane di un triangolo non possano essere parallele, ma debbano invece necessariamente intersecarsi, è un fatto intuitivo che potrebbe, volendo, essere visto come conseguenza di un assioma, l' "assioma dell'angolo convesso", da noi non esplicitato per brevità).
Vogliamo dimostrare che per O passa anche la mediana rimanente.

La struttura logica della dimostrazione è piuttosto inconsueta.

Prendiamo i punti medi D, E dei segmenti AO e BO.



Nel triangolo ABO, DE è la congiungente i punti medi di due lati, quindi è parallela al terzo lato e uguale alla sua metà: $\mathbf{DE \parallel AB}$, $\mathbf{DE = \frac{1}{2}AB}$.

Similmente, per lo stesso motivo, nel triangolo ABC avremo $\mathbf{NM \parallel AB}$, $\mathbf{NM = \frac{1}{2}AB}$.

Quindi DE ed NM, lati opposti del quadrilatero DEMN, sono segmenti PARALLELI (in quanto $\parallel$ alla stessa retta AB) e UGUALI (entrambi uguali a metà del segmento AB), per cui **DEMN è un parallelogrammo**.
E siccome **in un parallelogrammo le diagonali si tagliano scambievolmente per metà**, avremo $DO = OM$ e $NO = OE$.
In definitiva, risulta $AD = DO = OM$ e $NO = OE = EB$.
Ma in questo modo abbiamo scoperto qualcosa di molto interessante:
le due mediane tracciate, nell'attraversarsi, si sono tagliate vicendevolmente in due parti, delle quali quella contenente il vertice è doppia dell'altra.
Ora, se al posto delle due mediane AM e BN avessimo considerato UN'ALTRA COPPIA DI MEDIANE, evidentemente avremmo potuto trarre la stessa conclusione! E quindi,
se andassimo ora a disegnare la terza mediana, quest'ultima, nell'attraversare la mediana AM, la dividerebbe in due parti, tali che quella contenente il vertice sia doppia dell'altra.
Ma allora la mediana che parte dal vertice C dovrà necessariamente passare anch'essa per O, perché è evidente (e sarebbe dimostrabile con facilità) che non esiste alcun altro punto, oltre al punto O, dotato della proprietà di dividere AM in due parti delle quali quella contenente A sia doppia dell'altra.