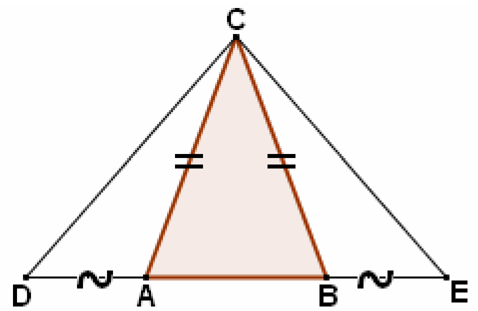
GEOMETRIA: ESERCIZI SUL CAPITOLO 2

1) **(Esercizio svolto)**
Sui due prolungamenti della base $\overline{AB}$ di un triangolo isoscele ABC si prendano due segmenti uguali $\overline{AD}=\overline{BE}$.
Dimostrare che il triangolo CDE è anch'esso isoscele.



Si segna SUBITO sul disegno
ciò che è noto per IPOTESI !!!

HP
(=IPOTESI)
$\overline{CA}=\overline{CB}$
$\overline{AD}=\overline{BE}$
(NOTA)

TH
(=TESI)
$\overline{CD}=\overline{CE}$

Ti consiglio di
scrivere sempre l'ipotesi e la tesi.

SUL DISEGNO, TI CONVERRA' SEGNARE *IMMEDIATAMENTE* CIO' CHE E' NOTO PER IPOTESI

(marcherai con simboli uguali i segmenti e gli angoli che sai per ipotesi essere uguali, indicherai con quadratini gli angoli che sai per ipotesi essere retti, ecc. ecc.)

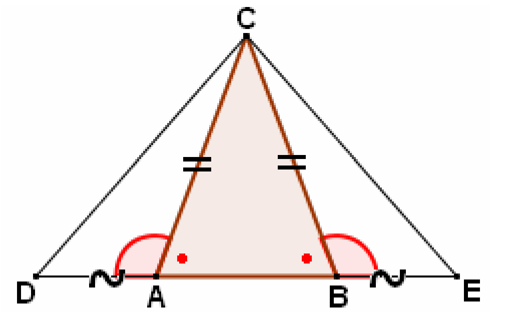
La tesi, invece, è meglio non segnarla: essa è il tuo obiettivo ultimo, esprime qualcosa che non "possiedi" ancora, qualcosa che ti è richiesto di "conquistare" con ragionamenti vari.

Soltanto al termine potrai finalmente dire: Evviva! Ci sono riuscito! La tesi è dimostrata! E a questo punto, se lo desideri, la rimarcherai vittoriosamente in figura.

NOTA
A rigore, occorrerebbe anche specificare, nell'ipotesi, che $\overline{AD}$ e $\overline{BE}$ si trovano sui PROLUNGAMENTI di $\overline{AB}$.
Per indicare questo, si potrebbe scrivere, ad esempio, $D\hat{A}B = A\hat{B}E = 180°$.
Tuttavia, per brevità, si possono lasciare sottintese precisazioni di questo genere.

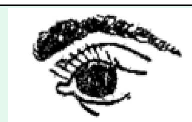
DIMOSTRAZIONE

Innanzitutto, poiché per HP il triangolo ABC è isoscele sulla base $\overline{AB}$,
si ha $C\hat{A}B = C\hat{B}A$ (**in un triangolo isoscele, gli angoli alla base sono uguali**).
Allora i due angoli $C\hat{A}D$, $C\hat{B}E$ **sono uguali perché supplementari di angoli uguali**:
$C\hat{A}D = 180° - C\hat{A}B = 180° - C\hat{B}A = C\hat{B}E$.



Conviene segnare sul disegno,
se si ritiene possa essere utile,
ciò che progressivamente
viene dedotto!!!

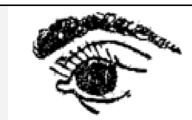
APPENA DEDUCI QUALCOSA CHE TI SEMBRA RILEVANTE, EVIDENZIALO *SUBITO* IN MATITA!



Nel nostro esempio, è molto importante marcare (lo abbiamo fatto con la coppia di pallini) che sono uguali gli angoli alla base del triangolo isoscele ABC, perché vederne **raffigurata visivamente** l'uguaglianza è una "spinta" a dedurre l'uguaglianza dei due angoli al loro fianco (uguali perché supplementari di angoli uguali: e noi lo andiamo immediatamente a indicare coi due archetti).
Adesso, il fatto che i triangoli CAD e CBE siano uguali ci è suggerito dal disegno! (2 lati e l'angolo compreso, 1° Criterio)

Confrontiamo ora i due triangoli CAD, CBE.
Essi hanno:
$\overline{CA}=\overline{CB}$ per HP;
$\overline{AD}=\overline{BE}$ per HP;
$C\hat{A}D = C\hat{B}E$
quindi **sono uguali per il 1° Criterio.**
In particolare, avranno $\overline{CD}=\overline{CE}$,
C.V.D.
(*ossia: Come Volevasi Dimostrare*)

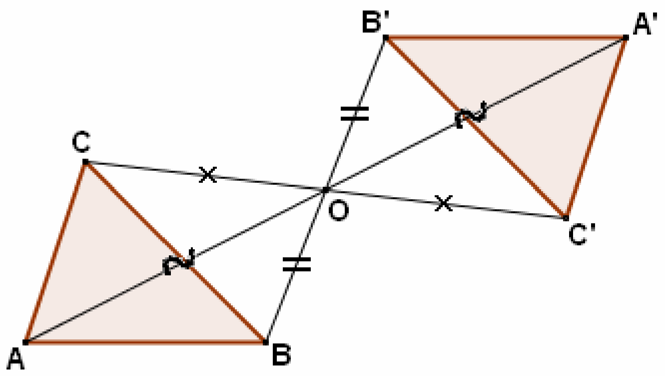
Un'ultima raccomandazione:
evita accuratamente di tracciare una figura che esprima un caso particolare.



Nel nostro esempio, sarebbe un caso particolare se il triangolo ABC venisse disegnato equilatero, oppure se i due prolungamenti della base fossero presi uguali ai lati obliqui, ecc.)

Beninteso: il teorema, essendo valido sempre, mantiene la sua validità anche nei vari casi particolari, ma utilizzando una figura che esprima un caso particolare c'è il pericolo di essere indotti a fare dei ragionamenti che "funzionano", appunto, solo in quel *caso specifico, ma non in generale.*

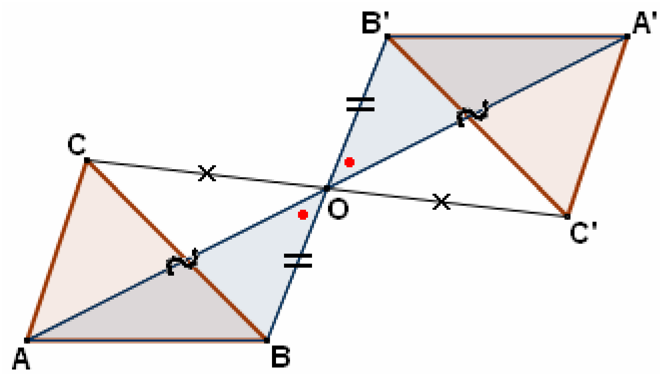
2) **(Esercizio svolto)**
Dato un triangolo ABC e un punto qualunque O fuori di esso,
si traccino i tre segmenti $\overline{AO}$, $\overline{BO}$ e $\overline{CO}$
e li si prolunghi, rispettivamente, di tre segmenti $\overline{OA'} = \overline{AO}$, $\overline{OB'} = \overline{BO}$, $\overline{OC'} = \overline{CO}$.
a) Dimostrare che il triangolo A'B'C' è uguale al triangolo ABC
b) Questo teorema resterebbe valido anche se il punto O fosse interno al triangolo ABC?



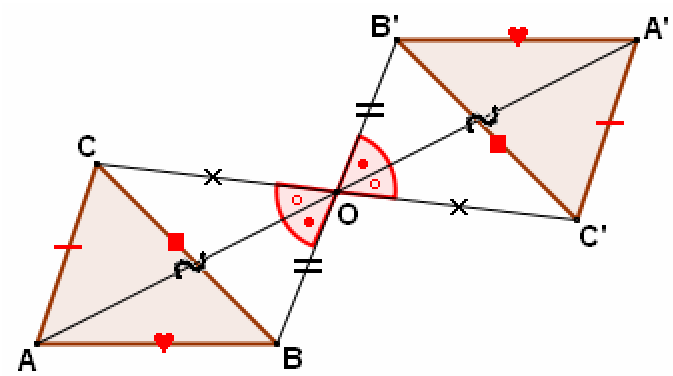
HP
$\overline{OA'} = \overline{AO}$
$\overline{OB'} = \overline{BO}$
$\overline{OC'} = \overline{CO}$

TH
$A'B'C' = ABC$

a) **DIMOSTRAZIONE**
Confrontiamo i due triangoli **OAB, OA'B'**.



Essi hanno: $\overline{AO} = \overline{OA'}$ per HP; $\overline{BO} = \overline{OB'}$ per HP; $A\hat{O}B = A'\hat{O}B'$ perché opposti al vertice
quindi **sono uguali per il 1° Criterio. In particolare**, avranno $\boxed{\overline{AB} = \overline{A'B'}}$.
Allo stesso modo,
confrontando i due triangoli OAC e OA'C', si dimostra che $\boxed{\overline{AC} = \overline{A'C'}}$
e **confrontando i due triangoli OBC e OB'C', si dimostra che** $\boxed{\overline{BC} = \overline{B'C'}}$



A questo punto, **andando a confrontare i due triangoli ABC e A'B'C',**
possiamo dire che sono uguali per il 3° Criterio (hanno infatti i tre lati rispettivamente uguali).
La tesi è dimostrata.

b) **Sì, il teorema resta valido anche se O è interno** ad ABC, e **la dimostrazione è identica.**

SE VUOI LAVORARE BENE … RICAPITOLIAMO:

♫ **Segna sempre sulla figura ciò che dice l'ipotesi**
(marcando con simboli uguali i segmenti o gli angoli che si sa essere uguali, indicando con un quadratino gli angoli che si sa essere retti, ecc. ecc.)

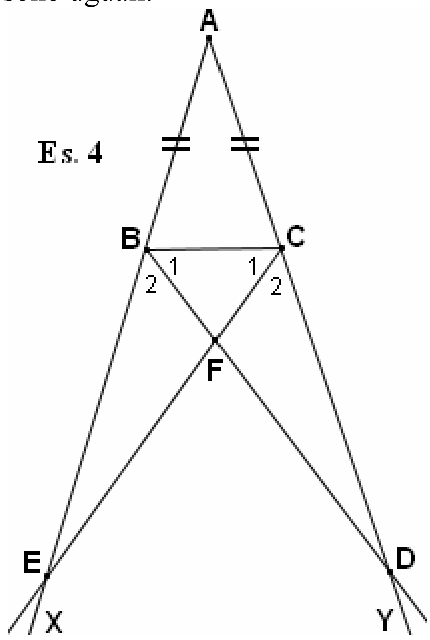
♫ **… E quando riesci a dedurre qualche affermazione intermedia interessante, ti conviene sempre segnare anche quella sul disegno prima di proseguire!**

♫ **Evita accuratamente di tracciare una figura che esprima un caso particolare**
(ad es., se l'ipotesi parla di un triangolo isoscele, meglio non disegnarlo equilatero; se parla di un angolo generico, meglio non farlo retto, ecc.)

3) Dimostra che in un triangolo isoscele le mediane relative ai lati uguali sono uguali.

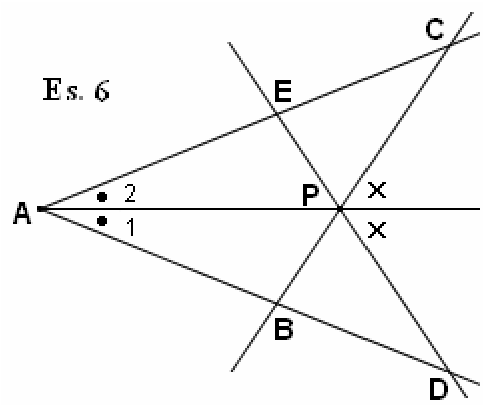
4) **(Vedi figura)**
In un triangolo isoscele ABC, di base $\overline{BC}$, si traccino i prolungamenti BX e CY (NOTA) dei due lati obliqui $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ e poi si tracci: la bisettrice dell'angolo $X\hat{B}C$, che tagli la semiretta CY in D, e la bisettrice dell'angolo $Y\hat{C}B$, che tagli BX in E.
Dimostrare che $\overline{BD} = \overline{CE}$ e che, detto F il punto di intersezione di BD e CE, è pure $\overline{BF} = \overline{CF}$.

NOTA: *I punti X e Y servono semplicemente per dare un nome alle due semirette che rappresentano i prolungamenti dei due lati obliqui: pertanto, tali punti X e Y non vanno presi in posizioni particolari, ma possono stare, su quelle semirette, dove si desidera.*



5) Se due triangoli hanno rispettivamente uguali due lati e la mediana relativa a uno di essi, allora sono uguali *(all'inizio della frase è sottinteso, evidentemente: "Dimostrare che …").*

6) **(Vedi figura)**
Per un punto P della bisettrice di un angolo $\hat{A}$ si tracciano due rette formanti angoli uguali con la bisettrice stessa (sono quelli indicati con le crocette in figura).
Una di queste rette taglia i lati dell'angolo rispettivamente in B e in C, l'altra taglia i medesimi lati rispettivamente in D e in E. Dimostrare che si ha:
I) $\overline{PB} = \overline{PE}$ II) $\overline{PD} = \overline{PC}$ III) $\overline{BC} = \overline{DE}$



7) Il quadrilatero ABCD è un "**deltoide**", ossia ha la proprietà di avere due lati consecutivi uguali fra loro, e gli altri due pure uguali fra loro: $\overline{AB} = \overline{BC}$, $\overline{CD} = \overline{DA}$.
Dimostra che le sue diagonali sono perpendicolari.

8) Dimostra che se in un triangolo una mediana è anche altezza, allora il triangolo è isoscele.

9) Dimostra che se in un triangolo una bisettrice è anche altezza, allora il triangolo è isoscele.

10) Dimostra che se in un triangolo una bisettrice è anche mediana, allora il triangolo è isoscele
[Questo teorema, rispetto ai due precedenti, è più difficile da dimostrare, perché non si può applicare nessuno dei tre Criteri di uguaglianza.
Ti do un'indicazione. Sia ABC il triangolo, e sia $\overline{CM}$ la mediana-bisettrice.
Prolunga $\overline{CM}$ dalla parte di M di un segmento $\overline{MD} = \overline{CM}$, poi congiungi D con A e con B; fai quindi delle considerazioni sui vari triangoli che compaiono ora in figura …]

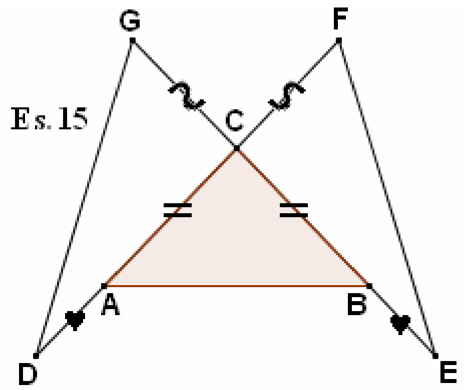
11) Dimostra che in due triangoli uguali le mediane relative a due lati rispettivamente uguali sono uguali.

12) Dimostra che in due triangoli uguali le bisettrici relative a due lati rispettivamente uguali sono uguali.

13) Spiega perché, a questo livello dello studio della Geometria, se tentiamo di dimostrare che "in due triangoli uguali le altezze relative a due lati rispettivamente uguali sono uguali" non ci può venire in aiuto nessuno dei tre Criteri di Uguaglianza dei Triangoli sin qui studiati.
… Ci si può però riuscire prolungando ogni altezza di un segmento ad essa uguale e congiungendo …

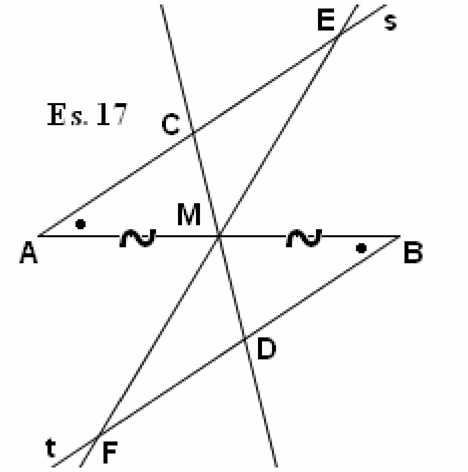
14) In un triangolo isoscele le mediane relative ai lati uguali si tagliano in parti rispettivamente uguali.

15) ☼ **(Vedi figura; dimostrazione guidata a pag. 332)**
E’ dato il triangolo ABC, isoscele sulla base $\overline{AB}$.
Si prolunghino i due lati obliqui $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$:
dalla parte della base, di due segmenti uguali $\overline{AD} = \overline{BE}$,
e dalla parte del vertice di due altri segmenti uguali fra loro
(ma non necessariamente coi precedenti) $\overline{CF} = \overline{CG}$.
Dimostrare che le due congiungenti $\overline{DG}, \overline{EF}$ sono uguali.

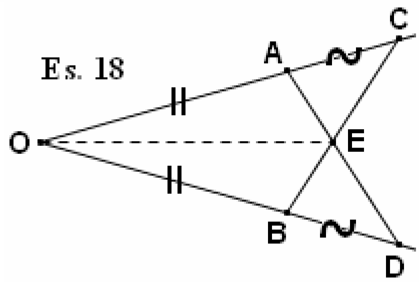


16) ☼ **(Dimostrazione guidata a pag. 332)**
Dimostrare che congiungendo i punti medi
dei tre lati di un triangolo isoscele,
si ottiene un nuovo triangolo isoscele.

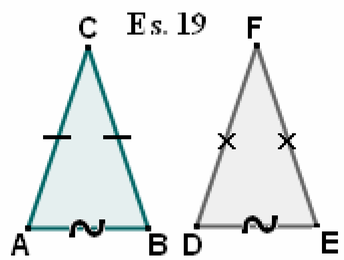
17) ☼ **(Vedi figura; dimostrazione guidata a pag. 332)**
Sia $\overline{AB}$ un segmento e M il suo punto medio.
Da A e da B, da parte opposta rispetto ad AB,
si traccino due semirette, s e t,
che formino angoli uguali con AB.
Per M si traccino due rette qualsiasi,
la prima delle quali tagli s in C e t in D,
la seconda tagli s in E e t in F.
Dimostrare che:
$\overline{AC} = \overline{BD}$; $\overline{CE} = \overline{DF}$



18) ☼ **(Vedi figura; dimostrazione guidata a pag. 333)**
Sui lati di un angolo qualunque di vertice O
si prendano rispettivamente i segmenti
$\overline{OA} = \overline{OB}$, $\overline{OC} = \overline{OD}$;
si indichi con E il punto in cui si intersecano
le congiungenti $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$.
Dimostrare che:
I) $\overline{AD} = \overline{BC}$ II) $\overline{EA} = \overline{EB}$
III) il punto E sta sulla bisettrice dell'angolo dato $\hat{O}$.



19) ☼ **(Vedi figura;**
dim. guidata a pag. 333)
Due triangoli isosceli
sono uguali
se hanno uguali
le basi
e i perimetri



HP $\overline{CA} = \overline{CB}$, $\overline{FD} = \overline{FE}$;
$\overline{AB} = \overline{DE}$; $2p(ABC) = 2p(DEF)$

TH $ABC = DEF$

♥ **Il simbolo più usato per indicare il perimetro è 2p**; **p** si riserva invece di norma al **SEMIperimetro** (= ½ del perimetro). Il perché è spiegato a pag. 335.

20) ☼ **(Dimostrazione guidata a pag. 333)**
Sui lati $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ del triangolo equilatero ABC si prendano tre segmenti uguali $\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF}$.
Dimostrare che il triangolo DEF è pure equilatero.

21) Se in un triangolo isoscele ABC si tracciano le bisettrici dei due angoli alla base $\hat{B}$ e $\hat{C}$, allora, detto D il loro punto di incontro, la congiungente DA biseca l’angolo al vertice (per “bisecare” si intende “tagliare in due parti uguali”)

22) Se un quadrilatero ABCD ha i lati opposti a due a due uguali ($\overline{AB} = \overline{DC}, \overline{AD} = \overline{BC}$) allora ha pure gli angoli opposti a due a due uguali ($\hat{A} = \hat{C}$, $\hat{B} = \hat{D}$): dimostralo (*Psst*: *occorre tracciare una* …)

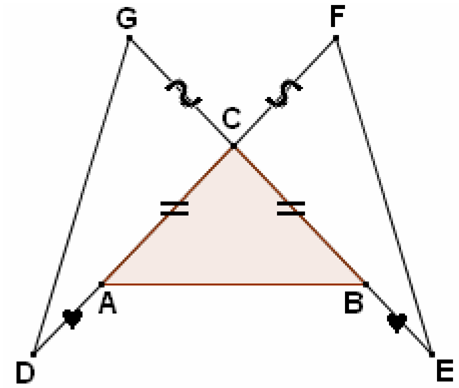
23) *Il teorema seguente appare a prima vista simile al 5), ma è decisamente più complicato.*
Dimostra che se due triangoli hanno rispettivamente uguali due lati e la mediana relativa al terzo lato, allora sono uguali. [Indicazione: prolunga ciascuna delle due mediane di un segmento ad essa uguale; congiungi l’estremo libero di ciascun prolungamento con le estremità del lato cui la mediana si riferisce; e utilizza, in successione: il 1° Criterio, il 3°, nuovamente il 1°]

☼ DIMOSTRAZIONI GUIDATE di alcuni fra gli esercizi (freccia = link alla dimostrazione completa)

15) DIM.
⇨ I due triangoli DCG ed ECF hanno:

$\overline{CG} = \overline{CF}$ per ………. ;
$D\widehat{C}G = E\widehat{C}F$ perché ……… ;
$\overline{CD} = \overline{CE}$ perché ………. (NOTA).

Quindi essi sono uguali per il …….. ;
in particolare, $\overline{DG} = \overline{EF}$, c.v.d.



HP
$\overline{CA} = \overline{CB}$
$\overline{AD} = \overline{BE}$
$\overline{CF} = \overline{CG}$

TH
$\overline{DG} = \overline{EF}$

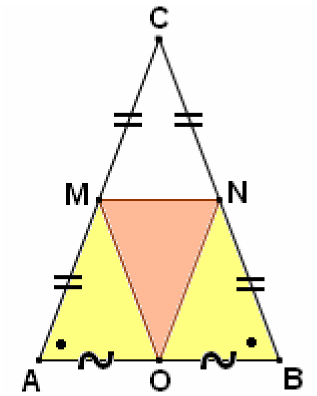
NOTA
Se si vuole **illustrare più in dettaglio** quest'ultima affermazione, si potrà utilizzare:

a) una **catena**: $\overline{CD} = \overline{CA} + \overline{AD} = ... + ... = \overline{CE}$

b) oppure una **somma membro a membro di due uguaglianze:**

$$\begin{array}{l} \overline{CA} = ... \\ \overline{AD} = ... \\ \hline \underbrace{\overline{CA} + \overline{AD}}_{\overline{CD}} = \underbrace{..... + ...}_{\overline{CE}} \end{array}$$

16)
⇨



HP
$\overline{AC} = \overline{BC}$

$\left.\begin{array}{l}\overline{AM} = \overline{MC} \\ \overline{BN} = \overline{NC}\end{array}\right]$ (NOTA)

$\overline{AO} = \overline{OB}$

TH
$\overline{OM} = \overline{ON}$

NOTA :
sulla figura, abbiamo segnato direttamente $\overline{AM} = \overline{MC} = \overline{BN} = \overline{NC}$, "anticipando" il semplice ragionamento secondo cui metà di segmenti uguali sono uguali

DIM. Osserviamo innanzitutto che i 4 segmenti $\overline{AM}, \overline{MC}, \overline{BN}, \overline{NC}$ sono **TUTTI uguali fra loro (e non soltanto uguali a due a due)**, perché ……..

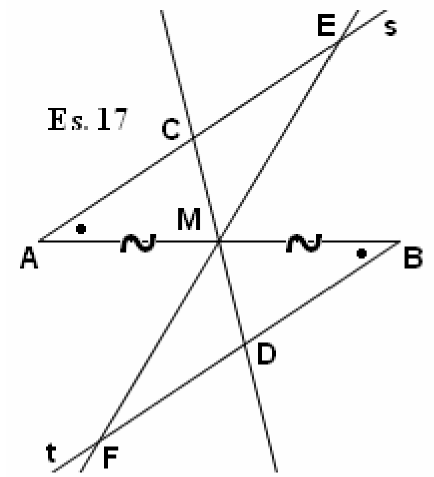
In dettaglio, infatti, possiamo scrivere $\overline{AM} = \overline{MC} = \frac{1}{2}..... = \frac{1}{2}..... = \overline{BN} = \overline{NC}$.

Confrontiamo ora i due triangoli AOM e BON.
Essi hanno: $\overline{AM} = \overline{BN}$; $\overline{AO} = \overline{OB}$ per …….. ; $\widehat{A} = \widehat{B}$ perché ……...
Quindi AOM e BON sono uguali per il ……… , e in particolare $\overline{OM} = \overline{ON}$, c.v.d.

17) DIM.
⇨ I) Confrontiamo i due triangoli AMC e BMD:

$\widehat{A} = \widehat{B}$ per …….. ;
$A\widehat{M}C = B\widehat{M}D$ perché ……..
(*segna la loro uguaglianza con due simboli identici in figura!*);
$\overline{AM} = \overline{MB}$ per ……..

Quindi è AMC = BMD per il …….. ;
in particolare, $\overline{AC} = \overline{BD}$.



HP
……..
……..

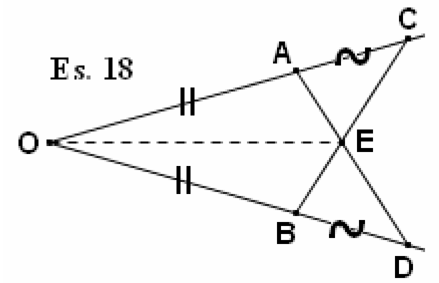
TH
I) $\overline{AC} = \overline{BD}$
II) $\overline{CE} = \overline{DF}$

II) Dall'uguaglianza di AMC e BMD prima dimostrata segue, fra l'altro, che
$\overline{CM} = \overline{MD}$ e $A\widehat{C}M = B\widehat{D}M$
(*segna queste uguaglianze sulla figura!*)
Quindi, confrontando ora ECM e FDM, avremo

- $\overline{CM} = \overline{MD}$
- $E\widehat{C}M = F\widehat{D}M$ perché …….. : la catena illustrativa è $E\widehat{C}M = 180° - ..... = 180° - ..... = F\widehat{D}M$
- $E\widehat{M}C = F\widehat{M}D$ perché …….. .

Pertanto ECM = FDM per il …….. e, in particolare, $\overline{CE} = \overline{DF}$. La dimostrazione è completata.

18) ⇨



HP

$\overline{OA}=\overline{OB}$, $\overline{OC}=\overline{OD}$

(in figura, per comodità, abbiamo già segnato $\overline{AC}=\overline{BD}$:
"differenze di segmenti uguali sono uguali";
questa annotazione grafica permette anche,
insieme all'altra relativa a $\overline{OA}=\overline{OB}$,
di "ricostruire" immediatamente, per somma,
l'uguaglianza nota $\overline{OC}=\overline{OD}$)

TH

I) $\overline{AD}=\overline{BC}$

II) $\overline{EA}=\overline{EB}$

III) il punto E sta sulla bisettrice di $\hat{O}$,
vale a dire, congiunto O con E, si ha $E\hat{O}A=E\hat{O}B$

DIM.

I) Confrontiamo OAD, OBC:

$\overline{OA}=\overline{OB}$ (per ....);
$\overline{OD}=\overline{OC}$ (per ....);
$\hat{O}$ in comune.

Quindi OAD = OBC (per il ....) e, in particolare, $\overline{AD}=\overline{BC}$.

II) Innanzitutto dall'uguaglianza di OAD e OBC segue anche (*segna subito sulla figura!!!*)

$B\hat{D}E=A\hat{C}E$ e $O\hat{A}E=O\hat{B}E$.

Ma se $O\hat{A}E=O\hat{B}E$, allora anche $C\hat{A}E=D\hat{B}E$ perché .... :
la catena illustrativa è $C\hat{A}E=180°-.....=..............=D\hat{B}E$ (*segna sulla figura!!!*).
Quindi, confrontando i due triangoli AEC e BED, si ha che:

$A\hat{C}E=B\hat{D}E$; $C\hat{A}E=D\hat{B}E$; $\overline{AC}=\overline{BD}$ perché .... : $\overline{AC}=........=........=\overline{BD}$.

Di conseguenza, AEC = BED per il .... e, in particolare, $\overline{EA}=\overline{EB}$.

III) OAE ed OBE sono uguali per il .... : infatti

$\overline{OE}$ è .... ; $\overline{OA}=\overline{OB}$ per .... ; $\overline{EA}=\overline{EB}$ come già dimostrato (*l'avevi segnato in figura?*).

Dall'uguaglianza dei due triangoli considerati segue, in particolare, $E\hat{O}A=E\hat{O}B$, c.v.d.

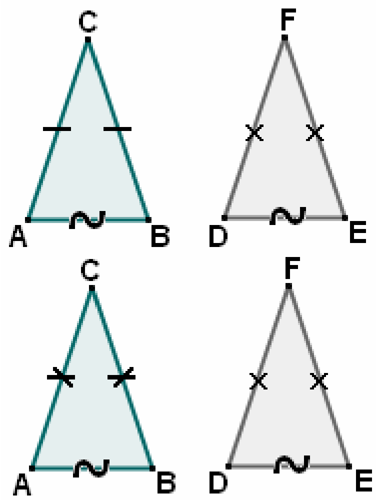
19) ⇨

DIM.

Se sono uguali i perimetri e le basi,
saranno uguali anche i lati obliqui!
Infatti

$$\overline{CA}=\overline{CB}=$$
$$=\frac{2p(ABC)-.....}{2}=\frac{2p(DEF)-.....}{2}=$$
$$=\overline{FD}=\overline{FE}$$

Annotate dunque
tali uguaglianze sulla figura, $\rightarrow$
potremo concludere che
i due triangoli considerati
sono uguali per il .... , c.v.d.



HP

$\overline{CA}=\overline{CB}$
$\overline{FD}=\overline{FE}$
$\overline{AB}=\overline{DE}$
$2p(ABC)=2p(DEF)$

TH

$ABC=DEF$

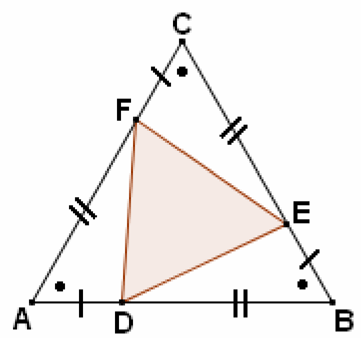
20) ⇨

DIM.

Prima di tutto, si osserva che $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}$
perché ....

Inoltre, i tre segmenti $\overline{DB}$, $\overline{EC}$, $\overline{FA}$
sono uguali perché .... ;
infatti, schematicamente:

$$\begin{array}{ccccc} \overline{AB} & = & \overline{BC} & = & \overline{CA} \\ \overline{AD} & = & \overline{BE} & = & \overline{CF} \end{array}$$
$$\underbrace{\overline{AB}-\overline{AD}}_{\overline{DB}}=\underbrace{.........}_{.........}=\underbrace{\overline{CA}-\overline{CF}}_{\overline{FA}}$$



HP

$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$
$\overline{AD}=\overline{BE}=\overline{CF}$

TH

$\overline{DE}=\overline{EF}=\overline{FD}$

Confrontiamo allora *simultaneamente* i tre triangoli ADF, BED e CFE.
Essi hanno $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}$, $\overline{FA}=\overline{DB}=\overline{EC}$, ... , quindi sono uguali per il ....
e in particolare si ha $\overline{FD}=\overline{DE}=\overline{EF}$, C.V.D.