GEOMETRIA: ESERCIZI SULLE DISUGUAGLIANZE

Ti proporrò ora, come esercizi, **alcuni teoremi in cui la tesi è rappresentata da una disuguaglianza**.

Ovviamente, per la dimostrazione dovrai
ricordare quei teoremi noti che riguardano disuguaglianze fra segmenti o fra angoli;
ad esempio:

- *"in un triangolo, a lato maggiore sta opposto angolo maggiore, e viceversa";*
- *"in un triangolo, ciascun lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza";*
- *"in un triangolo, ciascun angolo esterno è maggiore di ciascuno degli angoli interni ad esso non adiacenti" (Teorema dell' Angolo Esterno in forma debole);*
- …

Molto sovente, in esercizi di questo tipo, occorrerà
applicare le **proprietà delle disuguaglianze fra segmenti o angoli**,
che abbiamo fissato come assiomi all'inizio del nostro studio della Geometria.

Le richiamiamo qui di seguito.

- ❑ Sommando membro a membro due disuguaglianze vere
(e aventi lo stesso verso, cioè: o entrambe col < o entrambe col >)
si ottiene ancora una disuguaglianza vera:

  $a < b \wedge c < d \rightarrow a + c < b + d$ (*ovviamente, lo stesso vale se al posto di "<" scriviamo ">"…*)

  - Invece *non* è lecito *sottrarre* membro a membro due disuguaglianze equiverse:
  voglio dire, la disuguaglianza cui si perverrebbe
  potrebbe essere, a seconda dei casi, o vera o falsa!

- ❑ Moltiplicando, o dividendo, per uno stesso numero positivo ambo i membri
di una disuguaglianza vera, si perviene ancora ad una disuguaglianza vera:

  $a < b \rightarrow 2a < 2b;$ (*lo stesso vale se al posto di "<" scriviamo ">"; non staremo più a ripeterlo!*)

  $a < b \rightarrow \frac{a}{2} < \frac{b}{2};$

  ...

  $a < b \rightarrow ma < mb;$

  $a < b \rightarrow \frac{1}{n}a < \frac{1}{n}b;$

  $a < b \rightarrow \frac{m}{n}a < \frac{m}{n}b$

- ❑ Addizionando, o sottraendo, uno stesso termine da entrambi i membri di una disuguaglianza vera,
si ottiene ancora una disuguaglianza vera:

  $a < b \rightarrow a + c < b + c$

  $a < b \rightarrow a - c < b - c$

Dall'ultimo assioma citato si possono dedurre facilmente

♪ la cosiddetta "**regola del trasporto**":
"nell'ambito di una disuguaglianza, è lecito trasportare un termine di somma algebrica
da un membro all'altro, cambiandolo però di segno"

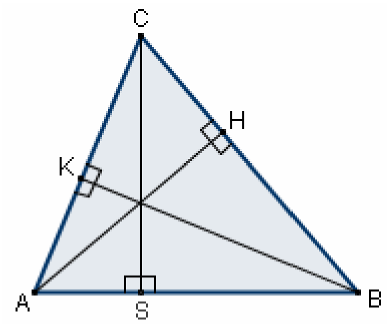
$$d + e < f \rightarrow d < f - e \quad \left(d \cancel{+e}\ \boxed{\cancel{-e}} < f\ \boxed{-e}\right)$$

♫ il "**principio di cancellazione**":
"nell'ambito di una disuguaglianza, se uno stesso termine (addendo di somma algebrica)
compare tanto a primo quanto a secondo membro, è lecito cancellarlo"

$$g + h < i + h \rightarrow g < i \quad \left(g \cancel{+h}\ \boxed{\cancel{-h}} < i \cancel{+h}\ \boxed{\cancel{-h}}\right)$$

*Ecco ora una rassegna di **esercizi**.*
*Sono **difficili**, è vero!!! Non scoraggiarti!*
Proprio perché impegnativi, possono essere particolarmente appassionanti.

1) (**Esercizio svolto**)
In un triangolo la somma delle tre altezze è minore del perimetro e maggiore del semiperimetro



IPOTESI
$AH \perp BC,\ BK \perp AC,\ CS \perp AB$

TESI
I) $\mathbf{AH + BK + CS < 2p}$
II) $\mathbf{AH + BK + CS > p}$

♥ Per motivi di praticità, omettiamo, in questa pagina, il "cappello di segmento", che sappiamo non "obbligatorio"

In Geometria, generalmente si preferisce indicare il **perimetro** con **2p**; **il simbolo p è invece, di norma, impiegato per indicare il SEMIperimetro** (= la metà del perimetro). Questa scelta si deve al fatto che se si indicasse il *perimetro* con p, il *semiperimetro* dovrebbe essere indicato con p/2, e le tante formule geometriche che contengono non il perimetro ma il semiperimetro, si troverebbero così a presentare fastidiosi denominatori.

DIMOSTRAZIONE

I)
$$\begin{array}{rl} AH < AB & \text{(triangolo rettangolo AHB: in un tr. rett. ciascun cateto è minore dell'ipotenusa)} \\ BK < BC & \text{(tr. rett. BKC)} \\ CS < AC & \text{(tr. rett. CSA)} \\ \hline AH + BK + CS < AB + BC + AC & \text{c.v.d.} \end{array}$$

II)
$$\begin{array}{rl} AH > AB - BH & \text{(tr. ABH: in un triangolo un lato è maggiore della diff. degli altri due)} \\ AH > AC - CH & \text{(tr. ACH)} \\ BK > BC - CK & \text{(tr. BCK)} \\ BK > AB - AK & \text{(tr. ABK)} \\ CS > AC - AS & \text{(tr. ACS)} \\ CS > BC - BS & \text{(tr. BCS)} \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2AH + 2BK + 2CS &> AB - BH + AC - CH + BC - CK + AB - AK + AC - AS + BC - BS = \\ &= AB + AC + BC + AB + AC + BC - (BH + CH + CK + AK + AS + BS) = \\ &= 2AB + 2AC + 2BC - (BC + AC + AB) = \\ &= 2AB + 2AC + 2BC - BC - AC - AB = \\ &= AB + AC + BC \end{aligned}$$

Quindi

$$2(AH + BK + CS) > AB + AC + BC \quad \rightarrow \quad AH + BK + CS > \frac{AB + AC + BC}{2} \quad \text{c.v.d.}$$

ALTRI ESERCIZI

2) In ogni triangolo, ciascuna mediana è minore della semisomma (= metà della somma) dei due lati che hanno con essa un estremo in comune
(prolungare la mediana di un segmento uguale alla mediana stessa, poi congiungere ...)

3) In ogni triangolo la somma delle tre mediane è minore del perimetro e maggiore del semiperimetro
(utilizzare il teorema precedente)

4) ⇨ *(difficile!)* In un triangolo ABC, se O è un punto interno, si ha $\overline{OB} + \overline{OC} < \overline{AB} + \overline{AC}$

5) Se in un triangolo ABC si congiungono i vertici con un punto interno O, la somma $OA + OB + OC$ è minore del perimetro e maggiore del semiperimetro

6) In un triangolo ABC sia AD la bisettrice dell'angolo $\widehat{A}$ (il punto D sta sul lato BC); dimostrare che $AB > BD,\ AC > CD$

7) In un triangolo ABC, se O è un punto interno, si ha $B\widehat{O}C > B\widehat{A}C$

8) In ogni quadrilatero, la somma delle diagonali è maggiore del semiperimetro e minore del perimetro