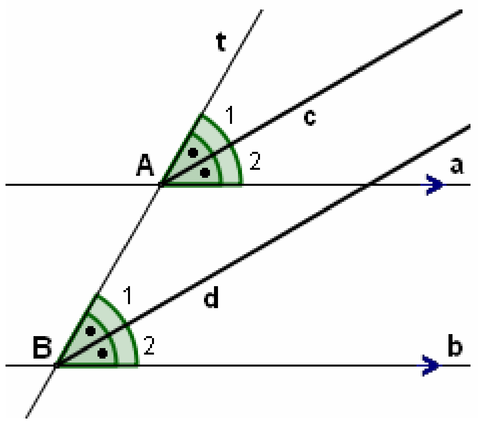
GEOMETRIA: ESERCIZI SUL CAPITOLO 3

1) **(Esercizio svolto)**
**Dimostra che le bisettrici di due angoli corrispondenti,
formati da due rette parallele con una trasversale, sono anch'esse parallele.**



HP

$a \parallel b$ (sulla figura abbiamo messo le "freccette di parallelismo" proprio per evidenziare questo fatto)

$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (c bisettrice di $t\widehat{A}a$)

$\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ (d bisettrice di $t\widehat{B}b$)

TH

$c \parallel d$

NOTA
Notazioni come $t\widehat{A}a$, $t\widehat{B}b$ per indicare gli angoli
sono "disinvolte", ma comode
(si "approfitta" di lettere già presenti in figura,
per evitare di introdurre altre lettere)
e per questo comunemente accettate.

DIM.

In figura, abbiamo evidenziato con il "doppio archetto"
i due angoli corrispondenti $t\widehat{A}a$, $t\widehat{B}b$ da noi considerati
per evidenziarne l'uguaglianza:
$t\widehat{A}a$ e $t\widehat{B}b$ **sono uguali** proprio **perché
corrispondenti rispetto a due *parallele* con trasversale**.

Ma allora i quattro angoli $\widehat{\mathbf{A}}_1, \widehat{\mathbf{A}}_2, \widehat{\mathbf{B}}_1, \widehat{\mathbf{B}}_2$
sono TUTTI E QUATTRO uguali fra loro, e non soltanto uguali a due a due,
in quanto sono **metà di angoli uguali**:

$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \frac{1}{2} t\widehat{A}a = \frac{1}{2} t\widehat{B}b = \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ (li abbiamo indicati tutti e quattro con il "pallino").

Essendo, **in particolare**, $\widehat{\mathbf{A}}_1 = \widehat{\mathbf{B}}_1$,
**dato che questi due angoli sono in posizione di corrispondenti
rispetto alle due rette c, d con la trasversale t**,
ne discende che $\mathbf{c \parallel d}$,

C.V.D.

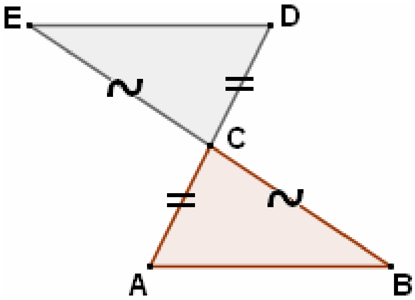
OSSERVAZIONE

MOLTO istruttivo!!!
Vediamo dunque che
nella dimostrazione di questo teorema ci siamo serviti

- **prima, del Teorema Inverso sul Parallelismo**
("se due rette sono parallele, allora formano con ogni trasversale angoli corrispondenti uguali"),
- **poi, del Teorema Diretto**
("se due rette formano con una trasversale due angoli corrispondenti uguali, allora sono parallele")

2) **(Esercizio svolto)**

Preso un triangolo ABC, si prolunga il lato $\overline{AC}$ di un segmento $\overline{CD}=\overline{AC}$ e il lato $\overline{BC}$ di un segmento $\overline{CE}=\overline{BC}$.
Si chiede di dimostrare che la congiungente DE è parallela ad AB.



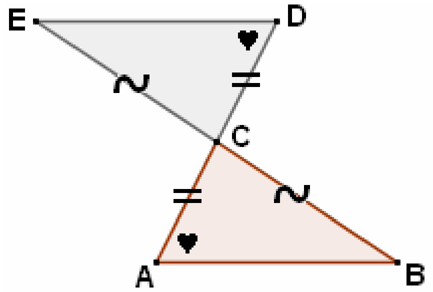
HP
$\overline{CD}=\overline{AC}$
$\overline{CE}=\overline{BC}$

TH
$DE \parallel AB$

♥ NOTA
Abbiamo scritto $DE \parallel AB$, senza il "cappello",
perché l'idea di parallelismo
si riferisce in modo più "naturale" alle rette
(anche ai segmenti, ma solo in quanto parti di rette).
Nessun problema, comunque:
anche scrivere $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ sarebbe stato corretto.

DIM.

I due triangoli **DEC e ABC sono uguali per il 1° Criterio**
($\overline{CD}=\overline{AC}$ e $\overline{CE}=\overline{BC}$ per ipotesi, $E\widehat{C}D = B\widehat{C}A$ perché opposti al vertice).
Ne consegue, in particolare, $\hat{D}=\hat{A}$ (vedi figura qui sotto):

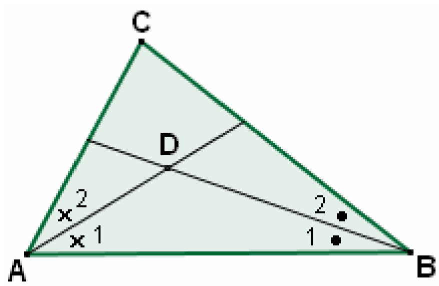


… e poiché questi angoli sono in posizione di alterni interni rispetto alle due rette DE, AB con la trasversale AD, dal fatto che siano uguali si trae
$DE \parallel AB$

C.V.D.

3) **(Esercizio svolto)**

L'angolo ottuso formato da due bisettrici di un triangolo, è uguale alla metà del terzo angolo del triangolo, più un angolo retto.



HP
$\hat{A}_1=\hat{A}_2,\quad \hat{B}_1=\hat{B}_2$

TH
$A\widehat{D}B=\frac{1}{2}\hat{C}+90°$

DIM.
Si può provare la tesi semplicemente impostando una catena
(vedi l'importante osservazione nel riquadro qui a destra →):

$$A\widehat{D}B \underset{ADB}{=} 180°-\left(\hat{A}_1+\hat{B}_1\right)=$$
$$=180°-\left(\frac{1}{2}\hat{A}+\frac{1}{2}\hat{B}\right)=180°-\frac{1}{2}\left(\hat{A}+\hat{B}\right)\underset{ABC}{=}$$
$$=180°-\frac{1}{2}\left(180°-\hat{C}\right)=180°-90°+\frac{1}{2}\hat{C}=90°+\frac{1}{2}\hat{C}\quad \text{C.V.D.}$$

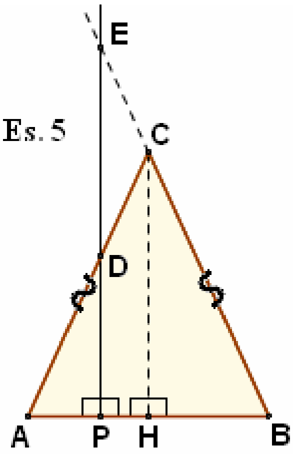
CATENE

L'uso delle CATENE è frequentissimo ed efficacissimo nelle dimostrazioni.

♥ **In una catena ben impostata ciascun "anello" deve essere ricavato A PARTIRE DALL' "ANELLO" CHE LO PRECEDE IMMEDIATAMENTE (non, quindi, fare riferimento ad altri anelli lontani …)**

4) In un triangolo ABC, si tracciano le bisettrici dei due angoli $\hat{A}$ e $\hat{B}$, indicando con D il loro punto di intersezione.
Per D si traccia poi la parallela ad AB, indicando con E, F i suoi punti di intersezione con $\overline{AC}$ e con $\overline{BC}$ rispettivamente.
Si chiede di dimostrare che $\overline{EF} = \overline{AE} + \overline{BF}$.

Es. 5



5) ☼ **(Vedi figura; dimostrazione guidata a pag. 340)**
Considerato un triangolo ABC, isoscele sulla base $\overline{AB}$, si prende su $\overline{AB}$ un punto arbitrario P e per P si traccia la perpendicolare ad AB, che interseca le rette dei due lati obliqui in D e in E rispettivamente.
Dimostrare che il triangolo CDE è isoscele
[Indicazione: tracciare l'altezza $\overline{CH}$]

6) Dimostra che le bisettrici di due angoli coniugati interni, formati da due rette parallele con una trasversale, sono fra loro perpendicolari.

7) ☼ **(Dimostrazione guidata a pag. 340)**
Se sui due lati obliqui $\overline{CA}, \overline{CB}$ di un triangolo isoscele ABC si prendono due punti P e Q tali che $\overline{CP} = \overline{CQ}$, allora la congiungente $\overline{PQ}$ è parallela alla base $\overline{AB}$ del triangolo.

8) Preso un triangolo ABC, si prolunga il lato $\overline{AC}$ di un segmento $\overline{CD} = \overline{BC}$ e il lato $\overline{BC}$ di un segmento $\overline{CE} = \overline{AC}$.
Si chiede di dimostrare che le congiungenti AE e BD sono parallele.

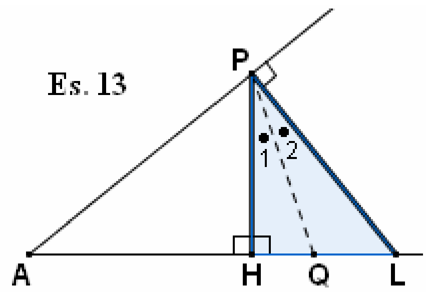
9) In un triangolo isoscele, la parallela alla base condotta per il vertice fa da bisettrice per ciascuno dei due angoli esterni, adiacenti all'angolo al vertice.

10) Se in un triangolo isoscele si traccia la bisettrice di uno qualsiasi dei due angoli esterni, adiacenti all'angolo al vertice, tale bisettrice risulta parallela alla base del triangolo.

11) In un triangolo isoscele ABC, di base $\overline{AB}$, traccia l'altezza $\overline{AK}$ relativa al lato $\overline{BC}$ e dimostra che $A\hat{C}B = 2B\hat{A}K$.

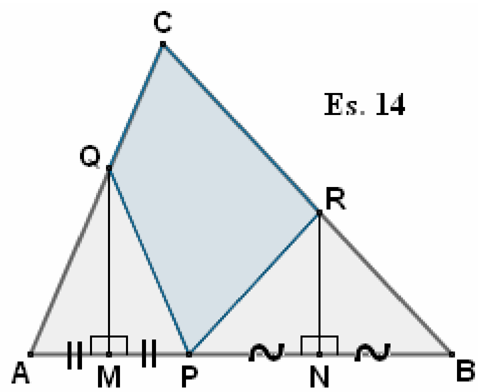
12) Sia ABC un triangolo, rettangolo in C.
Traccia l'altezza $\overline{CH}$ relativa all'ipotenusa, poi le bisettrici dei due angoli $A\hat{C}H$ e $A\hat{B}C$.
Dimostra che tali due bisettrici si tagliano perpendicolarmente.

Es. 13



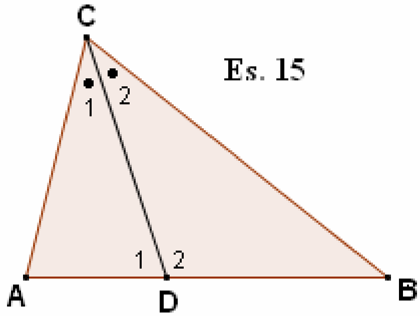
13) Sia $\hat{A}$ un angolo acuto, e sia P un punto di uno dei suoi lati.
Per P si conducono:
la perpendicolare all'altro lato dell'angolo, che lo incontra in H;
e la perpendicolare ad AP, che taglia l'altro lato dell'angolo in L.
Dimostra che, se si traccia la bisettrice dell'angolo $H\hat{P}L$ e si indica con Q il punto in cui tale bisettrice interseca il segmento $\overline{HL}$, il triangolo APQ è isoscele.

Es. 14



14) In un triangolo acutangolo ABC, si prende un punto qualunque P sul lato $\overline{AB}$, e si indicano con M, N i punti medi dei due segmenti $\overline{AP}$ e $\overline{PB}$.
La perpendicolare ad $\overline{AB}$ condotta per M interseca $\overline{AC}$ in Q;
la perpendicolare ad $\overline{AB}$ condotta per N interseca $\overline{BC}$ in R.
Dimostra che l'angolo $Q\hat{P}R$ è uguale all'angolo $A\hat{C}B$.

15) Sia ABC un triangolo, con $\hat{A} > \hat{B}$. Tracciata la bisettrice dell'angolo $\hat{C}$, dimostra che questa va a formare col lato $\overline{AB}$ due angoli, la cui differenza è uguale alla differenza $\hat{A} - \hat{B}$.



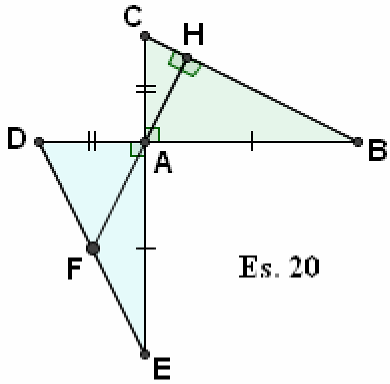
16) In un triangolo ABC, rettangolo in A, si congiunge il piede H dell'altezza $\overline{AH}$ relativa all'ipotenusa coi punti medi M ed N dei due cateti $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$. Dimostra che il perimetro del quadrilatero AMHN è uguale alla somma dei due cateti di ABC.

17) Se in un triangolo ABC, rettangolo in A, si tracciano la mediana $\overline{AM}$ relativa all'ipotenusa e poi la bisettrice dell'angolo $A\hat{M}C$, tale bisettrice risulterà parallela al cateto $\overline{AB}$.

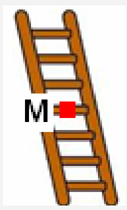
18) In un triangolo ABC, tracciate le altezze $\overline{AH}$ e $\overline{BK}$, risulta $\overline{AK} = \overline{BH}$. Dimostra che ABC è un triangolo isoscele.

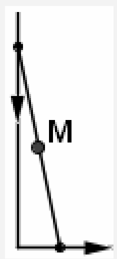
19) Nel quadrilatero ABCD, i due lati $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ sono fra loro uguali, e i due angoli $\hat{B}, \hat{D}$ sono entrambi retti. Dimostra che le diagonali di questo quadrilatero sono fra loro perpendicolari.

20) ☼ **(Vedi figura; dimostrazione guidata a pag. 340)**
E' dato un triangolo ABC, rettangolo in A. Si prolungano: il cateto $\overline{AB}$, dalla parte di A, di un segmento $\overline{AD} = \overline{AC}$ e il cateto $\overline{AC}$, dalla parte di A, di un segmento $\overline{AE} = \overline{AB}$; dopodiché si traccia, nel triangolo ABC, l'altezza $\overline{AH}$ relativa all'ipotenusa e infine si prolunga il segmento $\overline{AH}$, dalla parte di A, fino ad incontrare $\overline{DE}$ in F. Dimostrare che F è il punto medio di $\overline{DE}$.



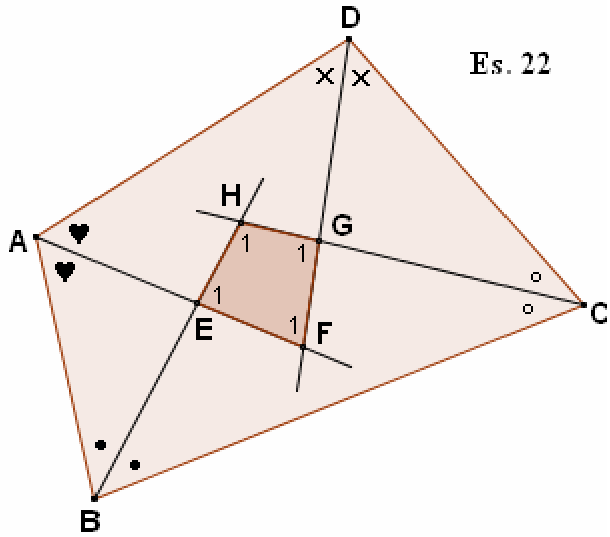
21) ⇨ **LA SCALA CHE SCIVOLA**



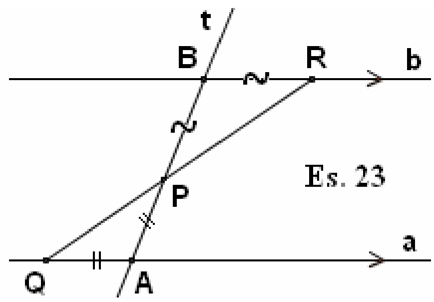


Una scala, appoggiata ad un muro, scivola in maniera tale che l'estremità superiore, abbassandosi, sta sempre a contatto con la parete, mentre la parte inferiore si allontana dal muro strisciando sul pavimento. La scala passa così da verticale ad orizzontale. In figura è evidenziato un punto M ad esattamente metà della lunghezza della scala. La domanda è: che traiettoria descrive questo punto, mentre la scala compie il movimento dalla verticalità all'orizzontalità? Le tue conoscenze sui triangoli rettangoli dovrebbero permetterti di rispondere correttamente.

22) Dimostra che le bisettrici degli angoli di un quadrilatero qualsiasi formano un quadrilatero che ha gli angoli opposti supplementari (la tesi è: $\hat{E}_1 + \hat{G}_1 = \hat{F}_1 + \hat{H}_1 = 180°$)



23) ⇨ (*Occhio! Qui è molto facile incorrere in errori logici …*)
Due parallele a, b sono tagliate da una trasversale t, che le interseca in A e in B rispettivamente. Fissato un punto qualsiasi P sul segmento $\overline{AB}$, sulla retta a si prenda un segmento $\overline{AQ} = \overline{AP}$ e sulla retta b si prenda un segmento $\overline{BR} = \overline{BP}$, in modo che Q ed R si trovino da parti opposte rispetto alla retta t. Dimostrare che i due segmenti $\overline{PQ}$ e $\overline{PR}$ stanno uno sul prolungamento dell'altro.



24) Se i punti Q ed R di cui si parla nel n. 23 stessero invece dalla stessa parte rispetto alla trasversale t, quanto misurerebbe l'angolo formato dai due segmenti $\overline{PQ}$ e $\overline{PR}$? Dimostra la tua affermazione.

☼ DIMOSTRAZIONI GUIDATE di alcuni fra gli esercizi (freccia = link alla dimostrazione completa)

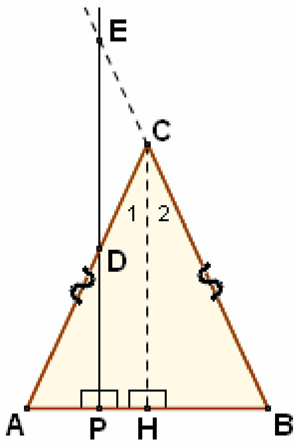
5) DIM.

⇨ Costruzione: tracciamo l'altezza $\overline{CH}$ del triangolo isoscele ABC, relativa alla base $\overline{AB}$.
Essa, per un teorema noto, risulterà anche ……..
dell'angolo al vertice $A\hat{C}B$: sarà dunque $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$
(*segnalo immediatamente in figura con due simboli identici*!)
Ora, le due rette EP, CH sono …….. fra loro,
perché …….. alla stessa retta AB
(*segna subito in figura con le freccette questo parallelismo*!)
e perciò:

$D\hat{E}C = \hat{C}_2$ (perché ………. rispetto alle due parallele ……. e ……. con la trasversale …….)

$E\hat{D}C = \hat{C}_1$ (perché ………. rispetto alle due parallele ……. e ……. con la trasversale …….)

(*Psst … Hai segnato in figura le nuove uguaglianze ottenute*?)
Dunque $D\hat{E}C =$ .... = ... $= E\hat{D}C$.



HP
$\overline{CA} = \overline{CB}$
$EP \perp AB$

TH
$\overline{CE} = \overline{CD}$

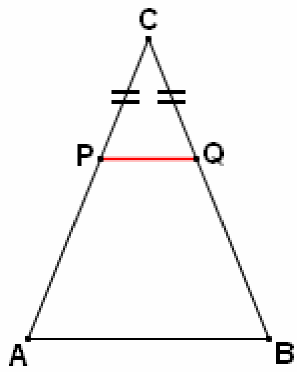
Il triangolo DCE ha quindi due angoli uguali: ma se un triangolo ha due angoli uguali, allora è ………
(i lati uguali sono, precisamente, quelli opposti agli angoli uguali); si ha perciò $\overline{CE} = \overline{CD}$ c.v.d.

7) DIM.

⇨ $\hat{A} = \hat{B}$ perché …….. ; $C\hat{P}Q = C\hat{Q}P$ perché …….. ;
ma in ogni triangolo, la somma dei tre angoli interni dà ……. ,

quindi $C\hat{P}Q = C\hat{Q}P \underset{PQC}{=} \dfrac{180° - .....}{.....} \underset{ABC}{=} \hat{A} = \hat{B}$

Vale a dire, i quattro angoli $C\hat{P}Q$, $C\hat{Q}P$, $\hat{A}$, $\hat{B}$
sono **tutti e quattro** uguali fra loro,
non solo uguali a due a due
(*segniamolo subito sulla figura! quattro simboli identici!*);
in particolare, è $C\hat{P}Q = \hat{A}$, e allora le due rette PQ e AB,
formando con la trasversale AC due angoli …………….. ,
sono parallele, c.v.d.

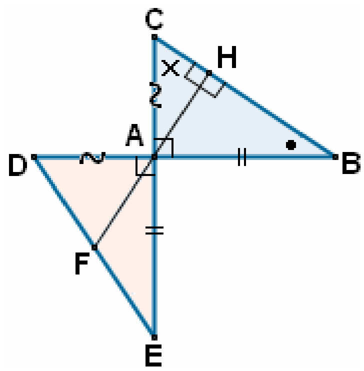


HP
$\overline{CA} = \overline{CB}$
$\overline{CP} = \overline{CQ}$

TH
$PQ \parallel AB$

20) DIM.

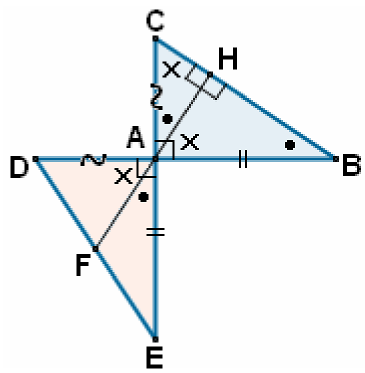
⇨ Innanzitutto un triangolo rettangolo,
quando si traccia l'altezza relativa all'ipotenusa,
viene da questo spezzato in due triangoli
che sono …… fra loro (e col triangolo di partenza).
Con riferimento ad ABC,
si hanno le uguaglianze angolari
che andiamo a illustrare in figura
(due angoli "pallino": $\hat{B}$ e ……..
e due angoli "crocetta": $\hat{C}$ e …….) →



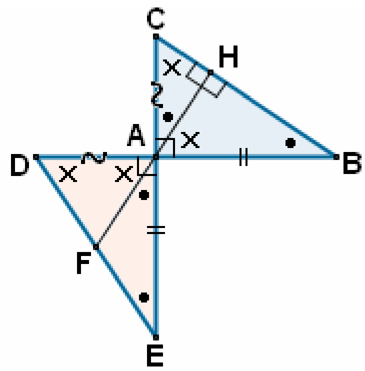
HP
$C\hat{A}B = 90°$
$\overline{AD} = \overline{AC}$
$\overline{AE} = \overline{AB}$
$AH \perp BC$

TH
$\overline{DF} = \overline{FE}$

Dopodiché,
per via della
presenza
di angoli
…….. ,
avremo
un'altra
coppia
"pallino",
"crocetta".
→



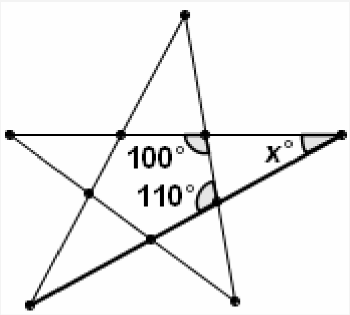
Ma i due triangoli
ABC e AED sono
uguali per il ……..,
per cui
$\hat{E} =$ ....., $\hat{D} =$ .....
e di conseguenza
possiamo collocare
sulla figura
un altro "pallino"
e un'altra "crocetta".
→



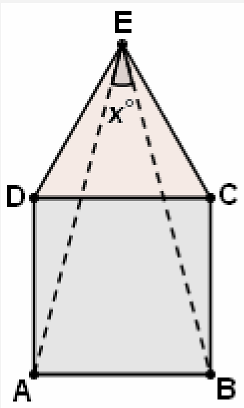
Ciò mostra in definitiva che i due triangoli FAD, FAE, avendo ciascuno due angoli uguali, sono ……..

per cui si ha $\boxed{DF} \underset{FAD}{=} .... \underset{FAE}{=} \boxed{FE}$ c.v.d.

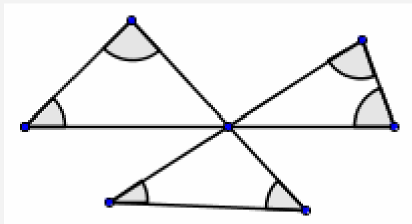
Angles' Corner



1) Quanto vale *x*?

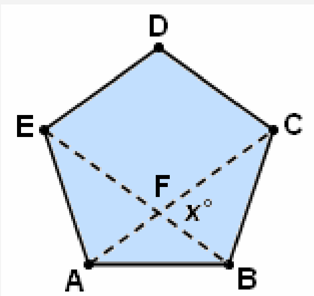


2)
La figura mostra un quadrato (4 lati uguali, 4 angoli retti) sormontato da un triangolo equilatero. Quanto vale l'angolo $A\hat{E}B$?



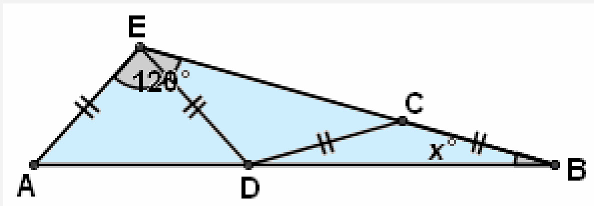
5) (*Kangourou* 2005)
Qual è la somma dei sei angoli nella figura qui sopra?

a) 300° b) 450° c) 360° d) 600° e) 380°

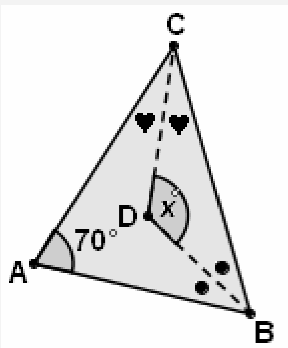


3)
ABCD è un pentagono "regolare", cioè con tutti i lati uguali e tutti gli angoli uguali.

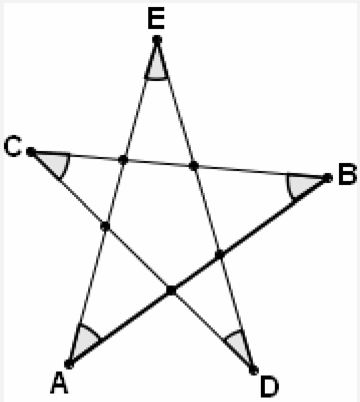
Quanto misura $B\hat{F}C$?



6) Nella figura sovrastante si ha
$\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EA}$.
Sapendo che $A\hat{E}B = 120°$,
determina la misura di $A\hat{B}E$



4)
Un triangolo ABC e le bisettrici BD, CD di due degli angoli interni. Se il terzo angolo misura 70°, quanto vale *x*?



7)
Stabilisci quanto vale la somma degli angoli $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, \hat{E}$ di una "stella a 5 punte" come quella qui a fianco raffigurata.

RISPOSTE Per evitare che si possa "sbirciare", le sette risposte sono date mediante altrettante equazioni. La soluzione di un quesito è il valore di *x* che si trova risolvendo l'equazione.

1) $\frac{x}{2} - 4 = \frac{x}{6} + 6$ 2) $x^2 = (x-40)^2 + 40(x-10)$ 3) $113 + 4(x-100) = 1$ 4) $\frac{x}{5} - (x-101) = 1$

5) $x - 20^2 = 3 \cdot 10^2 + 2^2 \cdot 5 - x$ 6) $(x+5)(x-5) = (x-20)^2 + 175$ 7) $2(3x-90) = x + 720$