

8. TAUTOLOGIE E CONTRADDIZIONI

Esistono delle **PROPOSIZIONI COMPOSTE** che sono **SEMPRE VERE**,
qualunque siano i valori di verità delle proposizioni componenti.
 Esse vengono dette **TAUTOLOGIE**.

Esempi: 1) $p \vee \bar{p}$ 2) $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

Il metodo delle tavole di verità permette di verificare in modo facile (e divertente!)
 se una data proposizione composta è una tautologia.
 Ad esempio, effettuiamo questa verifica per la 1):

p	\bar{p}	$p \vee \bar{p}$
V	F	V
F	V	V

ESERCIZIO - Verifica che la 2) è una tautologia, servendoti della seguente tabella:

p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	$p \rightarrow r$	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$
V	V	V					
V	V	F					
V	F	V					
V	F	F					
F	V	V					
F	V	F					
F	F	V					
F	F	F					

Ecco una piccola rassegna di tautologie particolarmente interessanti:

$p \vee \bar{p}$ Principio del terzo escluso	$\overline{p \wedge \bar{p}}$ Principio di non contraddizione
$(p \wedge \bar{p}) \rightarrow q$ “Ex falso quodlibet” (*)	$(\bar{p} \rightarrow p) \rightarrow p$ “Consequentia mirabilis”
$(\bar{p} \rightarrow (q \wedge \bar{q})) \rightarrow p$ Riduzione all’assurdo	$((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$

(*) “Dal falso (si può dedurre) qualsiasi cosa”

ESERCIZIO: verifica tramite le tavole di verità che le proposizioni della tabella precedente
 sono, effettivamente, delle tautologie.

E’ evidente che **due proposizioni composte a, b sono logicamente equivalenti
 se e solo se la biimplicazione $a \leftrightarrow b$ è una tautologia.**

E pertanto da una qualsivoglia equivalenza logica è possibile ottenere una tautologia
 semplicemente sostituendo il segno = (“logicamente equivalente”) col simbolo \leftrightarrow di biimplicazione.

Esempio: dall’equivalenza logica $\overline{p \wedge q} = \bar{p} \vee \bar{q}$ si può trarre la tautologia $\overline{p \wedge q} \leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}$.

In contrapposizione con le tautologie, esistono pure delle **PROPOSIZIONI COMPOSTE
 che sono SEMPRE FALSE**, qualunque sia il valore di verità delle proposizioni componenti.
 Esse vengono dette **CONTRADDIZIONI**. Esempio: $p \wedge \bar{p}$

Ovviamente,

- la negazione di una tautologia è sempre una contraddizione;
- la negazione di una contraddizione è sempre una tautologia.

ESERCIZI (risposte a pag. 376)

Dire quali delle seguenti proposizioni sono tautologie:

- (a) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow \overline{p \wedge \bar{q}}$ (b) $q \leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q})$ (c) $(p \wedge q) \rightarrow p$
 (d) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ (e) $((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow q$
 (f) $((p \rightarrow q) \rightarrow q) \vee \bar{q}$ (g) $(p \vee (p \wedge q)) \leftrightarrow (p \wedge (p \vee q))$