

10. CORRISPONDENZE FRA LOGICA E INSIEMI

Supponiamo ora che $a(x)$, $b(x)$ siano due proposizioni aperte, definite sullo stesso insieme ambiente.

- Detto A l'insieme di verità della $a(x)$, e detto B l'insieme di verità della $b(x)$, è facile convincersi che l'insieme di verità della proposizione aperta composta $a(x) \wedge b(x)$ è $A \cap B$.

Ad esempio, considerate le proposizioni

$$a(x) = "x \text{ è un numero pari}"; \quad b(x) = "x \text{ è un multiplo di 3}"$$

- i rispettivi insiemi di verità sono:

$$A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, \dots\}; \quad B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, \dots\}$$

- la proposizione $a(x) \wedge b(x)$ è la seguente:

" x è un numero pari e contemporaneamente è un multiplo di 3"

- e l'insieme di verità della $a(x) \wedge b(x)$ è perciò l'insieme dei multipli di 6, ossia $\{6, 12, 18, \dots\}$.

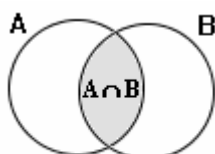
Ma quest'ultimo insieme è appunto $A \cap B$!!!

- E' altrettanto immediato determinare gli insiemi di verità di $a(x) \vee b(x)$; $\bar{a}(x)$: essi sono rispettivamente $A \cup B$; \bar{A} (= il complementare di A rispetto all'insieme universo)

RIASSUNTO SCHEMATICO

A = insieme di verità della proposizione aperta $a(x)$

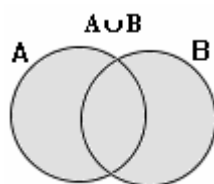
B = insieme di verità della proposizione aperta $b(x)$



intersezione

L'insieme di verità
della proposizione aperta
 $a(x) \wedge b(x)$
è
 $A \cap B$

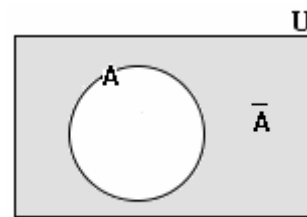
Infatti, dire $a(x) \wedge b(x)$
è come dire $x \in A \wedge x \in B$
cioè
 $x \in A \cap B$



unione

L'insieme di verità
della proposizione aperta
 $a(x) \vee b(x)$
è
 $A \cup B$

Infatti, dire $a(x) \vee b(x)$
è come dire $x \in A \vee x \in B$
cioè
 $x \in A \cup B$



complementazione

L'insieme di verità
della proposizione aperta
 $\bar{a}(x)$
è
 \bar{A}

(= il complementare di A
rispetto all'insieme universo)

Infatti, dire $\bar{a}(x)$
è come dire $x \notin A$
cioè
 $x \in U - A = \bar{A}$

♥ Notare come i **SIMBOLI** scelti dai matematici per indicare,
da una parte, i **connettivi proposizionali**, dall'altra le **operazioni fra insiemi**, sono tali che
CIASCUN SIMBOLO LOGICO RICHAMA IL SUO CORRISPONDENTE INSIEMISTICO:

LOGICA	INSIEMI
congiunzione \wedge	\cap intersezione
disgiunzione \vee	\cup unione
negazione $\bar{}$	$\bar{}$ complementazione

ESERCIZI (proposizioni aperte, logica e insiemi); le risposte sono a pag. 376.

1) Sia $a(x) = "x \text{ è multiplo di } 4"$, $b(x) = "x \text{ è multiplo di } 6"$.

Allora l'insieme di verità

di $a(x)$ è {

e quello di $b(x)$ è {

Sarà poi $a(x) \wedge b(x) = ""$

mentre l'insieme degli x per cui è vera $a(x) \vee b(x)$ ha come elementi

2) Sia $p(x) = "x \text{ è multiplo di } 4"$, $q(x) = "x \text{ è multiplo di } 8"$.

Allora è

$p(x) \wedge q(x) =$

$p(x) \vee q(x) =$

Quali sono gli x che rendono vera la proposizione $p(x) \wedge \overline{q(x)}$?

Si chiamano **"INTERVALLI"** particolari insiemi numerici (vedi schema seguente).

Gli intervalli possono essere: chiusi, aperti, semiaperti; possono essere limitati o illimitati.

Nota l'uso delle parentesi: parentesi **QUADRA** = **estremo COMPRESO**; **TONDA** = **estremo ESCLUSO**

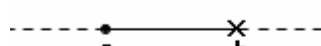
Intervallo chiuso di estremi a e b : $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$



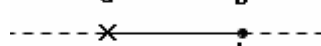
Intervallo aperto di estremi a e b : $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$



Interv. di estr. a e b , chiuso a sinistra e aperto a destra: $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$



Interv. di estr. a e b , aperto a sinistra e chiuso a destra: $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$



Intervallo chiuso illimitato superiormente: $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$



Intervallo aperto illimitato superiormente: $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$



Intervallo chiuso illimitato inferiormente: $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$



Intervallo aperto illimitato inferiormente: $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} / x < a\}$



Ad esempio, l'intervallo $[4, 8)$:

- contiene il 4;
- contiene tutti i numeri, **NON SOLO** quelli interi **MA ANCHE** quelli "con la virgola", compresi fra 4 e 8;
- NON** contiene l'8.

Anche l'intero insieme \mathbb{R} si può pensare come un intervallo (illimitato da entrambe le parti): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

3) a) $(2, 5) \cap (3, 7) = ?$ b) $(2, 5) \cup (3, 7) = ?$ c) $(2, 5] \cap (3, 7) = ?$ d) $(2, 5) \cup [3, 7) = ?$ e) $[2, 5) \cup (3, 7] = ?$

f) $(-3, \frac{1}{4}) \cap [0, +\infty) = ?$ g) $(-3, \frac{1}{4}) \cup [0, +\infty) = ?$ h) $(-5, -1) \cap (2, 7) = ?$ i) $(-5, -1) \cup (2, 7) = ?$

4) Sia $a(x) = "0 < x < 5"$. Qual è l'insieme ambiente di $a(x)$? E il suo insieme di verità?

5) Sia $a(x) = "2 < x < 10"$, $b(x) = "5 < x < 15"$.

a) Qual è l'insieme di verità di $a(x) \wedge b(x)$?

b) E quello di $a(x) \vee b(x)$?

c) E quello di $a(x) \wedge \overline{b(x)}$?

d) E quello di $\overline{a(x)} \wedge b(x)$?

6) Sia $a(n) = "n \text{ è divisore di } 12"$, $b(n) = "n \text{ è divisore di } 24"$.

Si può osservare che ogni valore di n che rende vera $a(n)$, renderà vera pure $b(n)$.

Questo fatto, cosa comporta per i rispettivi insiemi di verità A, B?

7) Considerate le proposizioni aperte, nell'insieme ambiente dei quadrilateri:

$p(x) = "x \text{ è un parallelogramma}"$, $d(x) = "x \text{ è un quadrilatero con le diagonali uguali}"$,

$c(x) = "x \text{ è un quadrilatero con almeno due lati opposti paralleli}"$,

stabilisci quali fra le proposizioni date sono vere nel caso x sia

a) un trapezio scaleno

b) un rettangolo.

c) Può esserci un valore di x che renda vera $d(x)$ ma false $p(x)$, $c(x)$?