

14. QUANTIFICATORI

\forall ("per ogni", "per qualsiasi", "qualunque sia"): "quantificatore UNIVERSALE"
 \exists ("esiste") la cui negazione è \nexists ("non esiste"): "quantificatore ESISTENZIALE"

Per imparare a trafficare coi quantificatori, ecco un buon **ESERCIZIO**.

Leggi ad alta voce le seguenti proposizioni; poi **stabilisci**, per ciascuna di esse, **se è vera o falsa**.

Risposte a pag. 377; clicca sulla freccia per chiarimenti \Rightarrow

1) $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} / x + y = 0$

2) $\exists x \in \mathbb{Z} / \forall y \in \mathbb{Z}, x + y = 0$

3) $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} / x \cdot y = 0$

4) $\exists x \in \mathbb{Z} / \forall y \in \mathbb{Z}, x \cdot y = 0$

5) $\forall x \in \mathbb{Q}, \exists y \in \mathbb{Q} / x \cdot y = 1$

6) $\forall x \in \mathbb{Q} - \{0\}, \exists y \in \mathbb{Q} / x \cdot y = 1$

7) $\exists x \in \mathbb{Z} / 2x - 1 = 0$

8) $A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x / x \in A \wedge x \notin B$

Tieni presente che:

\mathbb{Q} indica l'insieme dei numeri razionali (relativi)

\mathbb{Z} indica l'insieme degli interi relativi.

Dunque \mathbb{Z} è un sottoinsieme di \mathbb{Q}

\mathbb{Q}_a indica l'insieme dei numeri razionali assoluti

\mathbb{R} è l'insieme dei numeri reali (relativi)

\mathbb{R}_a è l'insieme dei numeri reali assoluti

La "classica" **definizione schematica di sottoinsieme**:

$A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$ ("A è sottoinsieme di B se e solo se quando x appartiene ad A, allora x appartiene anche a B")

può essere **riscritta in modo equivalente utilizzando i quantificatori**:

$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in A, x \in B)$ ("A è sottoinsieme di B se e solo se per ogni x appartenente ad A, x appartiene anche a B")

È importante saper scrivere correttamente la **negazione di una proposizione contenente quantificatori**. Facciamo qualche esempio (ricorda che "/", ":" si leggono "tale (o tali) che"):

Proposizione	Negazione
9) $\forall x \in I, x \in J$	$\exists x \in I / x \notin J$
10) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} / xy = 1$	$\exists x \in \mathbb{R} / \forall y \in \mathbb{R}, xy \neq 1$
11) $\exists a \in \mathbb{R} : \forall b, c \in \mathbb{R}, a \cdot b \cdot c = 0$	$\forall a \in \mathbb{R}, \exists b, c \in \mathbb{R} : a \cdot b \cdot c \neq 0$

♥ C'è una **regola generale per negare una proposizione contenente quantificatori**: essa dice di
 ♪ **mutare ogni quantificatore universale in esistenziale, e viceversa**
 ♪ **e sostituire la proposizione cui si riferiscono i quantificatori con la sua negazione.**

ESERCIZI: fra le seguenti proposizioni contenenti quantificatori, riconosci quali sono quelle false, e in tal caso scrivine la negazione.

Proposizione	V o F ?	Negazione (in caso di falsità dalla proposizione iniziale)
12) $\forall x \in \mathbb{R}_a, x^2 \geq x$		
13) $\exists a \in \mathbb{N} / a^2 = 20$		
14) $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + n$ è pari		
15) $\exists x \in \mathbb{R} / x = 1/x$		
16) $\exists x \in \mathbb{R} / x = -1/x$		
17) $\forall x, y \in \mathbb{R} x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$		

Risposte a pag. 377; clicca sulla freccia per chiarimenti \Rightarrow

ESERCIZI (negazione di proposizioni con quantificatori). **Risposte a pag. 377.**

- 1) Se non è vero che esista uno studente che ha fatto giuste tutte le domande di un certo test, allora:
- A) c'è uno studente che non ne ha azzeccata neppure una
 - B) esiste almeno uno studente che ne ha sbagliata una o più
 - C) ognuno degli studenti le ha sbagliate tutte
 - D) ciascuno studente ne ha sbagliata almeno una
 - E) tutti gli studenti ne han fatta giusta almeno qualcuna
- 2) Aldo dice: "Dài, ci sarà chi saprà risolvere almeno uno dei miei problemi! ...".
Bruno ribatte: "Non è mica vero!".
Cosa afferma Bruno?
- A) Che qualcuno non sa risolvere tutti i problemi di Aldo
 - B) Che tutti sanno risolverli tutti
 - C) Che nessuno è in grado di risolvere nemmeno uno dei problemi in questione
 - D) Che nessuno è in grado di risolvere tutti i problemi
 - E) Che qualcuno sa risolverli tutti

I seguenti sono tratti da test di ingresso universitari: 3, 5, 7, 8 Architettura; 4, Veterinaria; 6, Medicina

- 3) Pierino (lo sbruffone) afferma: "Ogni volta che gioco a tombola, vinco io!"
Il suo amico Carletto ribatte che questo non è vero. Carletto ha ragione; dunque necessariamente
- A) una volta ha giocato a tombola con Pierino e ha vinto Pierino
 - B) ogni volta che ha giocato a tombola, Pierino ha perso
 - C) qualche volta Carletto ha giocato a tombola con Pierino e altri amici, e non ha vinto Carletto
 - D) ogni volta che non ha giocato a tombola con Pierino, ha vinto Carletto
 - E) almeno una volta Pierino ha giocato a tombola e non ha vinto
- 4) Negare che "ogni uomo ha un cane" equivale a dire che:
- A) nessun uomo ha un cane
 - B) tutti gli uomini non hanno cani
 - C) esistono uomini senza cane
 - D) tutti i cani sono di ogni uomo
 - E) ogni uomo non ha un cane
- 5) *Credevo che tutti i medici avessero un rimedio per ogni male, ma l'esperienza mi ha costretto a ricredermi.*
Quale delle seguenti affermazioni consegue necessariamente dalla premessa?
- A) Per ogni male, c'è un medico che non sa porvi rimedio
 - B) C'è un male per cui nessun medico ha un rimedio
 - C) I medici non hanno rimedio per nessun male
 - D) Esiste un medico che non ha un rimedio per un certo male
 - E) Ogni medico manca del rimedio per almeno un male
- 6) Se è vero che «non tutti i mali vengono per nuocere»,
sarà necessariamente vera anche UNA delle affermazioni seguenti:
- A) i mali non nuocciono
 - B) quelli che nuocciono non sono mali
 - C) se non vengono per nuocere non sono mali
 - D) qualche male non viene per nuocere
 - E) se sono mali non vengono per nuocere
- 7) Un grande teorico dei numeri ha scoperto i numeri *troppobelli*, e, avendo osservato che tutti quelli che ha scoperto sono pari, congettura che esistano solo numeri *troppobelli* pari.
Un suo allievo, studiando con cura questi numeri, afferma che la congettura del maestro è falsa.
Dunque l'allievo sostiene che:
- A) nessun numero pari è *troppobello*
 - B) c'è almeno un numero pari che non è *troppobello*
 - C) esiste solo un numero finito di *troppobelli* pari
 - D) tutti i numeri *troppobelli* sono dispari
 - E) c'è almeno un numero *troppobello* dispari
- 8) Nel libero Stato di Burgundia tutti gli abitanti sono biondi oppure bruni. Inoltre
NON È VERO che in ogni città di Burgundia c'è almeno una casa in cui tutti gli abitanti sono biondi.
Allora necessariamente in Burgundia:
- A) c'è almeno una città dove c'è almeno un bruno in ogni casa
 - B) in ogni città c'è almeno una casa in cui tutti gli abitanti sono bruni
 - C) in ogni città c'è almeno un bruno in ogni casa
 - D) c'è almeno una città dove ci sono dei biondi in ogni casa
 - E) c'è almeno una città dove c'è almeno una casa in cui almeno un abitante è bruno