

EQUAZIONI FRATTE E LETTERALI

1. EQUAZIONI FRATTE

Sono quelle equazioni nelle quali l'incognita compare, almeno una volta, a denominatore.

Risolviendo un'equazione fratta, si perviene sempre a un passaggio del tipo:

$$(1) \quad \frac{N_1(x)}{D(x)} = \frac{N_2(x)}{D(x)} \quad (\text{la } x \text{ fra parentesi evidenzia che si tratta di espressioni contenenti l'incognita } x)$$

Eliminando a questo punto i due denominatori uguali, si ottiene l'equazione

$$(2) \quad N_1(x) = N_2(x)$$

LE DUE EQUAZIONI (1) e (2) NON SONO PERO' NECESSARIAMENTE EQUIVALENTI

(= non hanno necessariamente le stesse soluzioni, può darsi che non abbiano le stesse soluzioni).

Infatti:

- a) \Downarrow se un certo valore di x è soluz. della (1), allora lo stesso valore di x è certamente soluz. anche della (2);
 b) \nrightarrow però **non vale il viceversa**. Infatti, se un certo valore di x è soluzione della (2), vuol dire che quel valore di x rende uguali le due espressioni che stanno a NUMERATORE nella (1); ma può eccezionalmente accadere che il valore in questione vada pure ad annullare l'espressione $D(x)$, ossia il DENOMINATORE della (1), e in questo caso NON renderebbe i due membri della (1) uguali, bensì li renderebbe entrambi privi di significato, quindi NON SAREBBE soluzione della (1).

Ricapitolando,

♥ nel caso delle equazioni fratte, la soluzione che si trova alla fine è accettabile (cioè, è soluzione anche dell'equazione di partenza) soltanto se NON annulla il denominatore eliminato $D(x)$.

□ Esempio:

$$\frac{2}{4x^3 - x} = \frac{5}{6x^2 + 3x} + \frac{1}{2x^2 - x}$$

$$\frac{2}{x(2x+1)(2x-1)} = \frac{5}{3x(2x+1)} + \frac{1}{x(2x-1)}$$

$$\frac{6}{3x(2x+1)(2x-1)} = \frac{5(2x-1) + 3(2x+1)}{3x(2x+1)(2x-1)} \rightarrow$$

$$6 = 10x - 5 + 6x + 3$$

$$6 = 16x - 2; \quad -16x = -8$$

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{NON ACCETTABILE}$$

L'equazione è perciò IMPOSSIBILE.

OCCHIO!



$3x \neq 0; 2x+1 \neq 0; 2x-1 \neq 0$
 ossia

$$x \neq 0; \quad x \neq -\frac{1}{2}; \quad x \neq \frac{1}{2}$$

“CONDIZIONI DI ACCETTABILITA’”

(leggi l'osservazione qui a destra)

♥ Queste annotazioni, che si scrivono nel momento in cui si mandano via i due denominatori uguali, significano:

se alla fine dovessimo trovare come soluzione

$$x = 0,$$

$$\text{oppure } x = -1/2,$$

$$\text{oppure } x = 1/2,$$

si tratterebbe di una

"falsa soluzione",

o, come si suol dire, di una "soluzione non accettabile", quindi da scartare.

□ Un altro esempio:

$$\frac{1}{x(x+7)} = \frac{1}{2x(3x-4)}$$

$$\frac{2(3x-4)}{2x(x+7)(3x-4)} = \frac{x+7}{2x(x+7)(3x-4)} \quad \begin{matrix} 2x \neq 0 & x+7 \neq 0 & 3x-4 \neq 0 \\ \boxed{x \neq 0} & \boxed{x \neq -7} & 3x \neq 4 \end{matrix}$$

$$6x - 8 = x + 7; \quad 5x = 15; \quad \boxed{x = 3 \text{ accettabile}}$$

Come avrai notato, di fronte alle **condizioni contenenti il simbolo \neq** (“diverso da”) ci si comporta esattamente come di fronte alle equazioni: si isola la lettera con gli stessi passaggi, semplicemente scrivendo “ \neq ” anziché “ $=$ ”.

Qualche altro caso:

$$\frac{\dots}{\cancel{5x+4}} \quad \begin{matrix} 5x+4 \neq 0 \\ 5x \neq -4 \end{matrix} \quad \boxed{x \neq -\frac{4}{5}}$$

$$\frac{\dots}{\cancel{(x+3)^2}} \quad (x+3)^2 \neq 0, \quad x+3 \neq 0, \quad \boxed{x \neq -3}$$

Un quadrato è uguale a 0 quando è uguale a 0 la sua base, è diverso da 0 quando è diversa da 0 la sua base

Schematicamente: $\frac{N_1(x)}{D(x)} = \frac{N_2(x)}{D(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} N_1(x) = N_2(x) \\ D(x) \neq 0 \end{cases}$ OSSIA **l'equazione è equivalente al sistema.** Ricordiamo che la graffa di sistema esprime il connettivo logico \wedge ("ET")

\Rightarrow Se, per un certo x , è $\frac{N_1(x)}{D(x)} = \frac{N_2(x)}{D(x)}$, allora, per lo stesso x , sarà anche $\begin{cases} N_1(x) = N_2(x) \\ D(x) \neq 0 \end{cases}$

\Leftarrow Se, per un certo x , è $\begin{cases} N_1(x) = N_2(x) \\ D(x) \neq 0 \end{cases}$, allora, per lo stesso x , sarà anche $\frac{N_1(x)}{D(x)} = \frac{N_2(x)}{D(x)}$

♥ **Le "condizioni" vanno poste ogniqualvolta un denominatore cessa di essere tale**, per effetto:

a) dell'**eliminazione dei due denominatori uguali**

b) ... ma anche di un "**capovolgimento**"! Esempio:

$$\frac{\frac{x+1}{x+2}}{\frac{x-3}{x-4}} = 1 \quad \frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{x-4}{x-3} = 1 \quad \boxed{x \neq 4} \quad (\text{perché } x-4, \text{ che era a denominatore, per effetto del capovolgimento ha cessato di esserlo})$$

c) ... ma anche di una **semplificazione**! Esempio:

$$\frac{\cancel{x-5} \cdot 2x+1}{x-3} = 7 \quad \boxed{x \neq 5} \quad (\text{perché } x-5, \text{ che era a denominatore, per effetto della semplificazione ha cessato di esserlo})$$

d) ... ma anche del **procedimento "veloce"** col quale si può eliminare il denominatore pure senza fare i due denominatori comuni uguali, ma invece **moltiplicando ambo i membri**

dell'equazione per il denominatore stesso! Prendiamo ad es. l'equazione $\frac{3x-2}{x} + 7 = 0$;

per mandar via il denominatore, in questa situazione molto semplice, anziché fare i due denominatori comuni uguali posso più rapidamente moltiplicare ambo i membri per x ottenendo:

$$x \cdot \left(\frac{3x-2}{x} + 7 \right) = 0 \cdot x \quad 3x-2+7x=0 \quad \boxed{x \neq 0} \quad (\text{perché comunque, prima della moltiplicazione, un denominatore } x \text{ c'era})$$

ESERCIZI 1) $\frac{x+1}{x} = \frac{x+4}{x+2}$ 2) $3 \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9x-1}{x}$ 3) $\frac{x+3}{x-3} - \frac{x-3}{x+3} = \frac{11x+3}{x^2-9}$ 4) $\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} = \frac{1}{2x+4} \Rightarrow$

5) $\frac{3}{x^2+4+4x} = \frac{2}{x^2-4} \Rightarrow$ 6) $\frac{3x-1}{2x^2-2x} - \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x} = 0$ 7) $\frac{x-2}{x} = \frac{x}{x+1}$ 8) $\frac{1}{x^2-2x+1} + \frac{2}{x-1} = \frac{1}{2x-2}$

9) $\frac{2}{x-4} - \frac{1}{x} = 0$ 10) $\frac{2}{x^2-1} = \frac{3}{x^2-x-2}$ 11) $\frac{2}{3} - \frac{4x+5}{x-2} = 1$ 12) $\frac{4}{x^2-3x+2} = \frac{3}{x^2-5x+6}$

13) $2 \cdot \frac{x}{2x-1} = \frac{3x+1}{3x-1} \Rightarrow$ 14) $\frac{2}{x-2} + \frac{2}{x-4} = \frac{x}{x^2-6x+8}$ 15) $\frac{1}{x^2-2x-3} - \frac{1}{x^2-6x+9} = \frac{x-9}{(x+1)(x-3)^2}$

16) $\frac{2}{3x-2} + \frac{x+2}{3x^2-8x+4} = 0 \Rightarrow$ 17) $\left(\frac{1}{4x-3} - \frac{1}{4x+3} \right) \cdot \left(\frac{1}{4x} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{4x+3} = \frac{1}{2x}$ 18) $\frac{5x-2}{x^4-5x^2+4} = \frac{3}{x^3+2x^2-x-2}$

19) $\frac{3}{4x^4-5x^2+1} + \frac{1}{x^2-4x^4} = \frac{1}{2x^4+3x^3+x^2} \Rightarrow$ 20) $\frac{x+1}{7x-25} - \frac{x-7}{x-1} + (x-1)[x^{-2} - (x-1)^{-2}] = 0$

21) $\left(\frac{1}{3x+8} - \frac{1}{2x+8} \right) \cdot \left(\frac{4}{x} + 1 \right) = \frac{1}{2}$ 22) $\frac{3}{x-1} - \frac{5}{x^2-2x} = \frac{3x^2-11x+5}{x^3-3x^2+2x}$ 23) $\frac{x}{x+3} = \frac{x+5}{x+7}$

24) $\frac{2x+3}{x(16x^2-1)} - \frac{1}{4x^2+x} \cdot \frac{(x-1)(1+x)-x^2}{\left(\frac{2}{3}-1\right)^2} = \frac{4}{4x^4-x^3}$ 25) $\frac{2}{3x+1} - \frac{1}{3x-2} - \frac{1-\frac{2}{3x}}{\frac{9}{2}x^2-3x-\frac{1}{2}+\frac{1}{3x}} = 0$

SOLUZIONI

- 1) $x=2$ 2) $x=1/10$ 3) IMP. ($x=3$ non acc.) 4) $x=0$ 5) $x=10$ 6) IMP. ($x=1$ non acc.)
 7) $x=-2$ 8) $x=1/3$ 9) $x=-4$ 10) IMP. ($x=-1$ non acc.) 11) $x=-1$ 12) $x=9$ 13) $x=1$
 14) IMP. ($x=4$ non acc.) 15) $x=5$ 16) IMP. ($x=2/3$ non acc.) 17) $x=-2$ 18) IMP. ($x=-2$ non acc.)
 19) IMP. ($x=0$ non acc.) 20) $x=7/15$ 21) Si trova una soluzione accettabile. Fai la verifica, sostituendo.
 22) E' INDET.: ammette come soluzione QUALUNQUE numero reale, TRANNE 0, 1, 2. $S = \mathbb{R} - \{0, 1, 2\}$
 23) $x=-15$ 24) $x=20$ 25) IMP. ($x=-1/3$ non acc.)