2. EQUAZIONI LETTERALI

- **Problema 1**
Un padre ha 53 anni, suo figlio ne ha 15.
Fra quanti anni il padre avrà il triplo dell'età del figlio?

Facile:

x = numero di anni che devono passare affinché l'età del padre sia tripla di quella del figlio.
Fra x anni, il padre avrà $53+x$ anni, il figlio ne avrà $15+x$.
Possiamo perciò scrivere l'equazione

$$53+x=3(15+x)$$

e risolverla coi semplici passaggi seguenti:

$$\begin{aligned}&53+x=45+3x\\&x-3x=45-53\\&-2x=-8\\&x=4\end{aligned}$$

Fra 4 anni, dunque!

Vediamo se è giusto.

- Il padre, che attualmente ha 53 anni, fra 4 anni ne avrà 57.
- E il figlio, che attualmente ha 15 anni, fra 4 anni ne avrà 19.

Bene, 57 è proprio il triplo di 19. Dunque la soluzione è corretta.

- **Problema 2**
Un padre ha 45 anni, suo figlio ne ha 11.
Fra quanti anni il padre avrà il triplo dell'età del figlio?

"Ma professore …" – mi dirai tu a questo punto –
" … questo problema è identico al precedente, cambiano solo i dati!"

Infatti, evidentemente è proprio così!!!
… Però io penso che tu stia già comprendendo dove voglio arrivare ...

Abbi pazienza un attimo ancora.
Risolviamo anche questo problema n. 2,
dopodiché saremo pronti per entrare nel "cuore" del discorso.

x = numero di anni che devono passare affinché l'età del padre sia tripla di quella del figlio.
Fra x anni, le due età saranno $45+x$ e $11+x$; l'equazione risolvente è

$$45+x=3(11+x)$$

da cui si ottiene:

$$\begin{aligned}&45+x=33+3x\\&x-3x=33-45\\&-2x=-12\\&x=6\end{aligned}$$

Facciamo la verifica.
Fra 6 anni, le due età, che attualmente sono 45 e 11, saranno 45+6 = 51 e 11+6 = 17.
E 51 è proprio il triplo di 17. Tutto OK.

I due problemi proposti avevano dunque "la stessa struttura", differivano soltanto per i dati.
Ma allora … IDEA!
Perché non indicare i dati (l'età attuale del padre e quella del figlio)
con dei SIMBOLI anziché direttamente con dei numeri?
In questo modo, il procedimento sarebbe del tutto GENERALE
e non più legato ad un caso particolare …
e la risoluzione andrebbe bene per TUTTI i problemi di QUEL tipo,
che possiamo divertirci ad inventare.

❑ **Problema 3 (generalizzato)**
Un padre ha p anni, suo figlio f anni.
Fra quanti anni il padre avrà il triplo dell'età del figlio?

x = numero di anni che devono passare affinché l'età del padre sia tripla di quella del figlio.
Fra x anni, il padre avrà $p+x$ anni, il figlio ne avrà $f+x$.
L'equazione risolvente è

$$\boxed{p+x=3(f+x)}$$

EQUAZIONE "LETTERALE" O "PARAMETRICA"
nella quale

$\boxed{x \text{ è l'INCOGNITA}}$

mentre *p, f* NON sono incogniti, al contrario:

$\boxed{p,\ f \text{ sono NUMERI NOTI, FISSATI, ANCHE SE VOLUTAMENTE IMPRECISATI}}$

Ricaviamo x:

$$\begin{aligned}
&p+x=3(f+x)\\
&p+x=3f+3x\\
&x-3x=3f-p\\
&-2x=3f-p\\
&2x=p-3f\\
&x=\frac{p-3f}{2}
\end{aligned}$$

La formuletta trovata fornisce ora, istantaneamente,
la soluzione di TUTTI i problemi del tipo considerato.

Ad esempio, per un padre di 38 anni e un figlio di 8, avremo

$$x=\frac{38-3\cdot 8}{2}=\frac{38-24}{2}=\frac{14}{2}=7$$

… infatti, passati 7 anni, le età saranno 38+7 = 45 e 8+7 = 15; ed è proprio $45=15\cdot 3$.
Verifica tu stesso che, com'è ovvio, anche i due problemi affrontati precedentemente
(p = 53, f = 15; p = 45, f = 11) sono risolti in modo esatto dalla formula appena ottenuta.

❑ **Problema 4 (ulteriore generalizzazione)**
Un padre ha p anni, suo figlio f anni.
Fra quanti anni il padre avrà k volte l'età del figlio?

x = numero di anni che devono passare affinché l'età del padre sia k volte quella del figlio

$$\begin{aligned}
&p+x=k(f+x)\\
&p+x=kf+kx\\
&x-kx=kf-p\\
&(1-k)x=kf-p \quad \text{(NOTA 1)}\\
&x=\frac{kf-p}{1-k} \underset{\text{NOTA 2}}{=} \frac{p-kf}{k-1}
\end{aligned}$$

Ad esempio, con
$p=31,\ f=7,\ k=4$
si ha

$$x=\frac{p-kf}{k-1}=\frac{31-4\cdot 7}{4-1}=\frac{31-28}{3}=1$$

NOTA 1
Qui si è dovuta RACCOGLIERE L'INCOGNITA x
fra i termini che la contenevano, allo scopo di ottenere
che x comparisse, a primo membro, una sola volta,
moltiplicata per il suo bravo coefficiente $(1-k)$.
Dopodiché, dividendo per il coefficiente di x, si isola x:

$$\frac{\cancel{(1-k)}x}{\cancel{1-k}}=\frac{kf-p}{1-k}$$

NOTA 2
Abbiamo preferito cambiare i segni
di numeratore e denominatore,
in quanto i valori che il parametro k può assumere sono,
evidentemente, 2, 3, 4, … per cui il numero $1-k$ è negativo.

Dunque, ricapitolando:

Si dice “EQUAZIONE LETTERALE” (o anche: “equazione PARAMETRICA”)
un’equazione nella quale, OLTRE ALL’INCOGNITA,
compaiono anche ALTRE LETTERE che però
♥ *non* stanno a rappresentare numeri incogniti
bensì NUMERI NOTI, FISSATI,
ANCHE SE VOLUTAMENTE IMPRECISATI.

Tali lettere vengono dette “PARAMETRI” o “costanti”
(meglio sarebbe dire: “COSTANTI ARBITRARIE”).

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \textit{para–}\\ \textit{metro}}}{p} \;+\; \underset{\substack{\uparrow\\ \textit{inco–}\\ \textit{gnita}}}{x} \;=\; \underset{\substack{\uparrow\\ \textit{para–}\\ \textit{metro}}}{k} \;(\; \underset{\substack{\uparrow\\ \textit{para–}\\ \textit{metro}}}{f} \;+\; \underset{\substack{\uparrow\\ \textit{inco–}\\ \textit{gnita}}}{x} \;)$$

Altri esempi:

❑ **Problema 5**
Trovare due numeri che diano per somma s e per differenza d

numero minore = x, numero maggiore = $x+d$

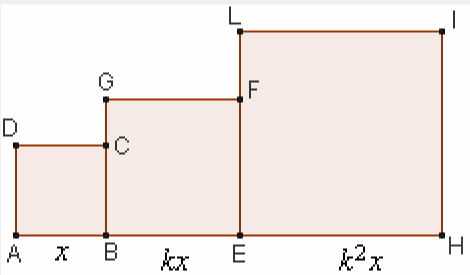
$x+x+d=s$

$2x=s-d$

$x=\dfrac{s-d}{2}$

numero minore = $\boxed{\dfrac{s-d}{2}}$, numero maggiore $=\dfrac{s-d}{2}+d=\dfrac{s-d+2d}{2}=\boxed{\dfrac{s+d}{2}}$

❑ **Problema 6**
Nella figura sottostante compaiono 3 quadrati.



Il lato del quadrato intermedio è k volte il lato del quadrato più piccolo,
e il lato del quadrato più grande è k volte il lato del quadrato intermedio.
Inoltre il contorno del poligono AHILFGCD ha una misura nota $2p$.
Determinare i lati dei tre quadrati.

$\mathrm{AB}=x,\quad \mathrm{BE}=kx,\quad \mathrm{EH}=k\cdot kx=k^2x$

$\mathrm{GC}=\mathrm{BG}-\mathrm{BC}=kx-x,\quad \mathrm{LF}=\mathrm{EL}-\mathrm{EF}=k^2x-kx$

$\underset{x}{\mathrm{AB}}+\underset{kx}{\mathrm{BE}}+\underset{k^2x}{\mathrm{EH}}+\underset{k^2x}{\mathrm{HI}}+\underset{k^2x}{\mathrm{IL}}+\underset{k^2x-kx}{\mathrm{LF}}+\underset{kx}{\mathrm{FG}}+\underset{kx-x}{\mathrm{GC}}+\underset{x}{\mathrm{CD}}+\underset{x}{\mathrm{DA}}=2p$

$\underline{x}\;\underline{\underline{+kx}}+\overset{\frown}{k^2x}+\overset{\frown}{k^2x}+\overset{\frown}{k^2x}+\overset{\frown}{k^2x}\cancel{-kx}\;\cancel{+kx}\;\underline{\underline{+kx}}\cancel{-x}\;\cancel{+x}\;\underline{+x}=2p$

$2x+2kx+4k^2x=2p$

$x+kx+2k^2x=p$

$\left(1+k+2k^2\right)x=p$

$\mathrm{AB}=\boxed{\dfrac{p}{1+k+2k^2}},\quad \mathrm{BE}=\boxed{\dfrac{kp}{1+k+2k^2}},\quad \mathrm{EH}=\boxed{\dfrac{k^2p}{1+k+2k^2}}$