

3. “DISCUSSIONE” DELLE EQUAZIONI LETTERALI

Si dice “DISCUSSIONE” di un’equazione letterale, la RICERCA di quei PARTICOLARI VALORI DEL PARAMETRO (o dei parametri) PER CUI L’EQUAZIONE RISULTA

- IMPOSSIBILE (= priva di soluzioni)
- oppure INDETERMINATA (= dotata di infinite soluzioni).

Il riconoscimento di tali valori “notevoli” avviene all’atto del passaggio finale, ossia quando, per isolare x , occorre dividere ambo i membri per il coefficiente di x ; ed eventualmente nel caso (raro) in cui l’equazione sia semplificabile per un’espressione contenente il parametro.

Di fronte ad un’equazione letterale, dobbiamo innanzitutto tenere conto di un’idea fondamentale:

- ♪ quando noi pensiamo che il parametro indica UN NUMERO FISSATO, da questo punto di vista abbiamo UNA EQUAZIONE
- ♪ quando pensiamo che il valore del parametro può essere FISSATO AD ARBITRIO, da quest’altro punto di vista abbiamo UNA FAMIGLIA DI INFINITE EQUAZIONI: ad ogni valore che il parametro può assumere corrisponde una delle equazioni della “famiglia”.
- ♥ Ora, la “discussione” consiste nell’andare a cercare gli eventuali “elementi degeneri” di questa famiglia, ossia quelle particolari equazioni della famiglia (se ce ne sono) che risultano, eccezionalmente, impossibili o indeterminate.

Vediamo una piccola rassegna di ESEMPLI.

1) $ax - 2 = 5x$

Trasportiamo i termini contenenti x a 1° membro e i termini noti a 2° membro:

$$ax - 5x = 2$$

Raccogliamo x :

$$\underbrace{(a-5)}_{\substack{\text{coefficiente} \\ \text{di } x}} x = 2$$

Ora l’obiettivo è di isolare x ;

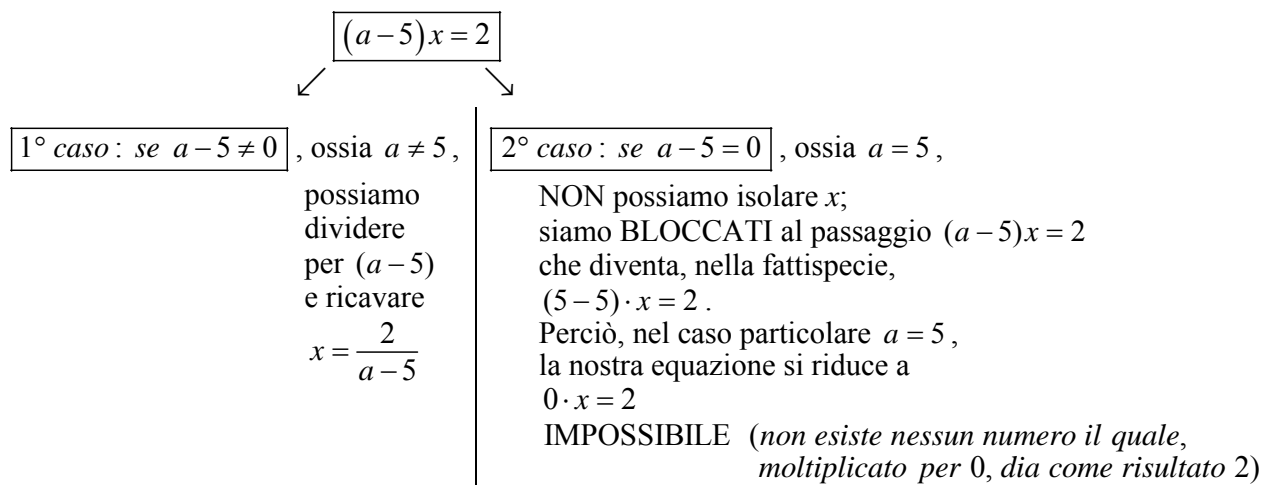
x è moltiplicata per il suo coefficiente $(a-5)$,

per cui occorrerà dividere entrambi i membri per tale coefficiente.

♥ MA UNA DIVISIONE E’ EFFETTUALE SOLTANTO SE IL NUMERO PER CUI SI INTENDE DIVIDERE E’ DIVERSO DA ZERO !



Quindi dobbiamo DISTINGUERE DUE CASI !!!



- Facciamo una verifica: l’equazione iniziale $ax - 2 = 5x$, cosa diventa nel caso particolare $a = 5$?
Diventa $5x - 2 = 5x$ ossia $\cancel{5x} - 2 = \cancel{5x}$; $-2 = 0$ IMPOSSIBILE.
- Vediamo la verifica per un qualunque caso “normale”, ad esempio il caso $a = 3$. Si ha
 $3x - 2 = 5x$; $-2x = 2$; $x = \boxed{-1}$... e -1 è proprio il valore assunto dalla frazione $\frac{2}{a-5}$ quando $a = 3$.

$$2) \frac{m(mx-1)-x}{3} = 1$$

$$m(mx-1)-x=3; \quad m^2x-m-x=3; \quad m^2x-x=m+3; \quad (m^2-1)x=m+3$$

$$\boxed{(m+1)(m-1)x=m+3}$$

Se $(m+1)(m-1) \neq 0$,
 ossia $m \neq -1$ e $m \neq +1$, brevemente: $m \neq \pm 1$
 (un prodotto è diverso da zero quando lo sono tutti i suoi fattori;
 è uguale a zero quando si annulla anche un solo fattore),
 potremo dividere per $(m+1)(m-1)$ ottenendo $x = \frac{m+3}{(m+1)(m-1)}$

- Se $m = 1$ l'equazione diventa $0 \cdot x = 4$ *imposs.*
- Se $m = -1$ l'equazione diventa $0 \cdot x = 2$ *imposs.*

$$3) \frac{1}{3}ax + x - \frac{2}{3} = \frac{ax}{2} - \frac{1}{6}b$$

$$\frac{2ax+6x-4}{\cancel{6}} = \frac{3ax-b}{\cancel{6}}; \quad 2ax-3ax+6x=-b+4; \quad -ax+6x=-b+4; \quad ax-6x=b-4$$

$$\boxed{(a-6)x=b-4}$$

**N
O
T
A**

♥ $0 \cdot x = \text{un numero diverso da zero}$ **IMPOSSIBILITA'**
 $0 \cdot x = 0$ **INDETERMINAZIONE (infinite soluzioni)**

Se $a-6 \neq 0$, ossia $a \neq 6$,

$$x = \frac{b-4}{a-6}$$

Se $a = 6$ l'equazione diventa

$$0 \cdot x = b-4 \begin{cases} \text{impossibile se } b-4 \neq 0, \text{ ossia } b \neq 4 \\ \text{indeterminata } (0 \cdot x = 0) \text{ se } b = 4 \end{cases}$$

NOTA

$$4) 3(px-4)-q=0$$

$$3px-12-q=0$$

$$\boxed{3px=q+12}$$

Se $3p \neq 0$, ossia $p \neq 0$:

$$x = \frac{q+12}{3p}$$

Se $p = 0$ l'equazione diventa $3 \cdot 0 \cdot x = q+12$

$$0 \cdot x = q+12 \begin{cases} \text{imposs. se } q+12 \neq 0, \text{ ossia } q \neq -12 \\ \text{indet. se } q = -12 \end{cases}$$

$$5) a(x-1)+5=x+b$$

$$ax-a+5=x+b; \quad ax-x=a+b-5$$

$$\boxed{(a-1)x=a+b-5}$$

Se $a-1 \neq 0$, ossia $a \neq 1$,

$$x = \frac{a+b-5}{a-1}$$

Se $a = 1$ l'equazione diventa $0 \cdot x = 1+b-5$

$$0 \cdot x = b-4 \begin{cases} \text{impossibile se } b \neq 4 \\ \text{indeterminata se } b = 4 \end{cases}$$

$$6) (a-b)^2 x - 1 = a + b(bx+1)$$

$$a^2x - 2abx + \cancel{b^2x} - 1 = a + \cancel{b^2x} + b; \quad a^2x - 2abx = a + b + 1$$

$$\boxed{a(a-2b)x = a + b + 1}$$

Se $a(a-2b) \neq 0$,
 ossia $a \neq 0 \wedge a \neq 2b$,

$$x = \frac{a+b+1}{a(a-2b)}$$

- Se $a = 0$ l'equazione diventa $0 \cdot x = b+1$ $\begin{cases} \text{imposs. se } b \neq -1 \\ \text{indet. se } b = -1 \end{cases}$
- Se $a = 2b$ l'equazione diventa $0 \cdot x = 2b+b+1$, quindi

$$0 \cdot x = 3b+1 \begin{cases} \text{imposs. se } b \neq -\frac{1}{3} \\ \text{indet. se } b = -\frac{1}{3} \text{ perciò } a = 2b = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$7) \quad x(a^3 + 1) - a^2(3x + b) = a - x(2a - 1)$$

$$a^3x \cancel{-x} - 3a^2x - a^2b = a - 2ax \cancel{-x}$$

$$\boxed{a^3x - 3a^2x - a^2b = a - 2ax}$$

Si osserva a questo punto che l'equazione è semplificabile per a !

Ora, SEMPLIFICARE equivale a DIVIDERE, e, di nuovo,

**UNA DIVISIONE E' EFFETTUABILE SOLTANTO SE
IL NUMERO PER CUI SI INTENDE DIVIDERE E' DIVERSO DA ZERO!**

Quindi dovremo DISTINGUERE DUE CASI:

Se $\boxed{a \neq 0}$ è possibile semplificare,

ottenendo:

$$a^{\cancel{3}}x - 3a^{\cancel{2}}x - a^{\cancel{2}}b = \cancel{a} - 2\cancel{a}x$$

$$a^2x - 3ax - ab = 1 - 2x$$

Se $\boxed{a = 0}$ l'equazione diventa

$$0 \cdot x - 0 \cdot x - 0 \cdot b = 0 - 0 \cdot x$$

$$0 = 0$$

INDETERMINATA

Proseguiamo ora, ponendoci nel caso $a \neq 0$, con l'equazione semplificata:

$$a^2x - 3ax - ab = 1 - 2x$$

$$a^2x - 3ax + 2x = ab + 1$$

$$(a^2 - 3a + 2)x = ab + 1$$

$$\boxed{(a-1)(a-2)x = ab + 1}$$

Se $(a-1)(a-2) \neq 0$,

cioè $\boxed{a \neq 1 \wedge a \neq 2}$:

$$x = \frac{ab + 1}{(a-1)(a-2)}$$

Se $\boxed{a = 1}$ l'equazione diventa:

$$(1-1)(1-2)x = 1 \cdot b + 1$$

$$0 \cdot x = b + 1 \left\{ \begin{array}{l} \text{impossibile se } b \neq -1 \\ \text{indeterminata se } b = -1 \end{array} \right.$$

Se $\boxed{a = 2}$ l'equazione diventa:

$$(2-1)(2-2)x = 2b + 1$$

$$0 \cdot x = 2b + 1 \left\{ \begin{array}{l} \text{impossibile se } b \neq -\frac{1}{2} \\ \text{indeterminata se } b = -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

IN DEFINITIVA,

i CASI DI INDETERMINAZIONE sono:

- $a = 0$, b qualsiasi (infinite equazioni)
- $a = 1$, $b = -1$
- $a = 2$, $b = -\frac{1}{2}$

mentre i CASI DI IMPOSSIBILITA' sono:

- $a = 1$, $b \neq -1$ (infinite equazioni)
- $a = 2$, $b \neq -\frac{1}{2}$ (infinite equazioni)

Per esercizio, dai, riprendi l'equazione iniziale

$$x(a^3 + 1) - a^2(3x + b) = a - x(2a - 1)$$

e ...

- va' a vedere cosa diventa nel caso $a = 1$, $b = -1$: fatti i vari calcoli e passaggi, troverai un'equazione INDETERMINATA.
- Fai lo stesso con $a = 1$, $b = 2$: troverai un'equazione IMPOSSIBILE.
- Fai lo stesso con $a = 3$, $b = 4$: troverai un'equazione con una e una sola soluzione, data da

$$x = \left[\frac{ab + 1}{(a-1)(a-2)} \right]_{a=3, b=4} =$$

$$= \frac{3 \cdot 4 + 1}{(3-1)(3-2)} = \frac{12 + 1}{2 \cdot 1} = \frac{13}{2}$$