ALTRI ESERCIZI SULLE EQUAZIONI LETTERALI CON LETTERE A DENOMINATORE

Risolvi e discuti le equazioni seguenti:

1) $\frac{2}{a+1}+\frac{a-1}{x-1}=1$ 2) $\frac{x}{x-2}=2\cdot\frac{b}{b-3}$ 3) $\frac{x}{m}-\frac{2x-3}{2m}=\frac{x+1}{x-1}$ 4) $\frac{a}{x-a-2}=\frac{2}{x-1}$ 5) $\frac{x+a}{x+3}-\frac{x^2+3}{x^2+3x}=0$

Per le seguenti equazioni letterali, non è richiesta la discussione.
Si chiede di fare invece la verifica, ossia, trovata la soluzione, di sostituirla al posto di x nell'equazione di partenza per controllare che l'uguaglianza sia, effettivamente, verificata.

6) $\frac{2}{x^2-a^2}-\frac{x}{x+a}+\frac{x}{x-a}=0$ 7) $\frac{\frac{x}{q}-\frac{x}{p}}{x+1}=\frac{1}{pq}$ 8) $\frac{x}{x^2-x-6}-\frac{c}{x-3}=0$ 9) $\frac{\frac{k+3}{x+3}-1}{2}+1=0$

10) $\frac{a}{x}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x}=\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}$ 11) $\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{x-a-b}=a^{-1}b^{-1}$ 12) $\frac{a}{x^2+x}+\frac{b}{2x+2}=3\cdot\frac{bx}{2x^2+2x}$

13) $\frac{1-\frac{1}{x}+b}{a-1}+1=0$ 14) $\frac{1}{ax-x-a+1}+\frac{1}{ax-x}+\frac{1}{x-x^2}=0$ 15) $\frac{a}{x^2+x-2}-\frac{b}{x^2-3x+2}=0$

16) $\frac{2x+a}{2x-a}-\frac{2x-a}{2x+a}=\frac{x+1}{4x^2-a^2}$ 17) $\frac{x-3}{x+k-1}=\frac{x+3}{x-k+1}$ 18) $\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{x}}=\frac{b}{a}$ 19) $\frac{a}{4x^2-4}-\frac{b}{8x+8}=0$

PROBLEMI CON DISCUSSIONE

20) Sia a un numero reale fissato.
Esiste un numero x tale che, addizionandogli a o moltiplicandolo per a, si ottenga il medesimo risultato? In caso affermativo, stabilire il valore di x.

21) Sia a un numero reale non nullo fissato.
Determinare, qualora esista, il numero x tale che, dividendolo per a o diminuendolo di a, si ottenga lo stesso risultato.

22) Dati due numeri reali non nulli a e b,
quale numero x bisogna sommare ai due termini della frazione a/b per ottenere la frazione b/a?

23) Sia $a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R}^*=\mathbb{R}-\{0\}$.
Quale numero occorre togliere a ciascuno dei due termini della frazione a/b per ottenere il quadrato di tale frazione?

24) Determina quel numero che aumenta di 1 unità se lo si moltiplica per m.

25) Sottraendo k da un numero, o dividendolo per k, si ottiene il medesimo risultato.
Di che numero si tratta?

26) Quale numero occorre addizionare ad entrambi i termini di una frazione a/b, affinché questa raddoppi?

27) Trovare due numeri sapendo che il rapporto fra il 1° e il 2° è r e la differenza fra il 1° e il 2° è d.

28) Trovare due numeri sapendo che la loro somma è s e il loro rapporto è r.

RISPOSTE

1) Perde significato con $a=-1$.
E' indeterminata con $a=1$: in tal caso, ne sono soluzione tutti i valori di x, tranne $x=1$.
Con $a\neq\pm1$, è $x=a+2$

2) Ha significato solo con $b\neq3$. E' impossibile quando $b=-3$. Per $b\neq\pm3$, è $x=\frac{4b}{b+3}$

3) Ha significato solo con $m\neq0$. E' impossibile se $m=\frac{3}{2}$. Con $m\neq\frac{3}{2}$, $m\neq0$ ha come soluz. $x=\frac{3+2m}{3-2m}$.

4) Si trova $x=-\frac{a+4}{a-2}$, sotto le condizioni $a\neq2,\ a\neq0,\ a\neq-1$. Con $a=2,\ a=0,\ a=-1$ l'equaz. è imposs.

$$\left[\begin{array}{l}\text{La condizione di accettabilità } -\frac{a+4}{a-2}\neq a+2 \text{ equivale a}\\ -a-4\neq a^2-4\ \ (a\neq2);\ \ a^2+a\neq0;\ \ a(a+1)\neq0 \text{ ossia } a\neq0,\ a\neq-1\end{array}\right]$$

5) $x=\frac{3}{a}\ \left(a\neq 0,\, a\neq -1\right)$. Con $a=0\ \vee\ a=-1$ l'equazione è impossibile.

6) $x=-\frac{1}{a}$ 7) $x=\frac{1}{p-q-1}$ 8) $x=\frac{2c}{1-c}$ 9) $x=-(k+6)$ 10) $x=abc$ 11) $x=2(a+b)$ 12) $x=\frac{a}{b}$

13) $x=\frac{1}{a+b}$ 14) $x=\frac{a}{2}$ 15) $x=2\cdot\frac{a+b}{a-b}$ 16) $x=\frac{1}{8a-1}$ 17) $x=0$ 18) $x=\frac{a-b}{2}$ 19) $x=\frac{2a+b}{b}$

20) Il numero x esiste, ed è $x=\frac{a}{a-1}$.

Fa eccezione però il caso $a=1$. In questo caso il problema è impossibile: non c'è nessun numero x tale che addizionandogli 1 o moltiplicandolo per 1 si ottenga il medesimo risultato.

Facciamo la verifica? Ma sì, dài:

$$\frac{a}{a-1}\boxed{+a}=\frac{a+a\left(a-1\right)}{a-1}=\frac{\cancel{a}+a^2\cancel{-a}}{a-1}=\boxed{\frac{a^2}{a-1}};\qquad \frac{a}{a-1}\boxed{\cdot a}=\boxed{\frac{a^2}{a-1}}\ \textit{OK, stesso risultato.}$$

Ad es., nel caso $a=3$, *il numero* x *è* $\left[\frac{a}{a-1}\right]_{a=3}=\frac{3}{2}$: *e infatti* $\frac{3}{2}+3=\frac{3+6}{2}=\frac{9}{2}$ *e anche* $\frac{3}{2}\cdot 3=\frac{9}{2}$

21) Il numero x in generale esiste, e vale $x=\frac{a^2}{a-1}$.

Soltanto nel caso particolare $a=1$, il problema è impossibile.

22) $x=-(a+b)$. Se però $a=b$, allora il problema è indeterminato:
infatti, in questo caso particolare, ogni numero x è soluzione del problema, escluso soltanto $x=-b$.

23) Nel caso generale $a\neq\pm b$, il numero è $\frac{ab}{a+b}$.

Il problema è invece:

- indeterminato se $a=b$ (in questo caso, qualsiasi numero va bene tranne il numero b);
- impossibile se $a=-b$.

Verifica: $$\frac{a-\frac{ab}{a+b}}{b-\frac{ab}{a+b}}=\frac{\frac{a\left(a+b\right)-ab}{a+b}}{\frac{b\left(a+b\right)-ab}{a+b}}=\frac{\frac{a^2\cancel{+ab}\cancel{-ab}}{a+b}}{\frac{\cancel{ab}+b^2\cancel{-ab}}{a+b}}=\frac{a^2}{\cancel{a+b}}\cdot\frac{\cancel{a+b}}{b^2}=\frac{a^2}{b^2},\ \text{OK}$$

24) Il numero è $\frac{1}{m-1}$, purché sia $m\neq 1$. Con $m=1$ il problema è impossibile.

25) Il problema ha senso solo per $k\neq 0$. La sua soluzione è il numero $\frac{k^2}{k-1}$, se $k\neq 1$. Con $k=1$, è imposs.

26) Questo problema ha senso solo con $b\neq 0$. Il numero è $\frac{ab}{b-2a}$, se $b\neq 2a\wedge b\neq a$.

Dev'essere $b\neq a$ in quanto l'equazione risolvente è $\frac{a+x}{b+x}=2\cdot\frac{a}{b}$ e occorre porre la condizione

$b+x\neq 0,\ x\neq -b$ da cui $\frac{ab}{b-2a}\neq -b,\ ab\neq -b\left(b-2a\right)$ ossia $a\neq -b+2a,\ b\neq a$.

Qualora sia $b=2a\vee b=a$ il problema è impossibile.

27) I due numeri sono $\frac{d}{r-1}$ e $\frac{rd}{r-1}$ rispettivamente, se $r\neq 1$.

Nel caso $r=1$, se $d\neq 0$ il problema è impossibile mentre nel caso $d=0$ è indeterminato,
con l'avvertenza, in quest'ultimo caso, che tutte le coppie di numeri
fra loro uguali ne sono soluzione, TRANNE la coppia (0, 0) per la quale non ha senso il rapporto.

28) I due numeri sono $\frac{rs}{r+1}$ e $\frac{s}{r+1}$ rispettivamente, se $r\neq -1$.

Nel caso $r=-1$, se $s\neq 0$ il problema è impossibile mentre nel caso $s=0$ è indeterminato,
con l'avvertenza, in quest'ultimo caso, che tutte le coppie di numeri
fra loro opposti ne sono soluzione, TRANNE la coppia (0, 0) per la quale non ha senso il rapporto.