2. SISTEMI DI 1° GRADO IN CUI IL NUMERO DELLE EQUAZIONI DIFFERISCE DAL NUMERO DELLE INCOGNITE

A) PIU' EQUAZIONI CHE INCOGNITE

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x-y=3 \\ 2x+y=9 \\ 3x-2y=7 \end{cases}$$

nel quale le incognite sono 2, ma le equazioni sono 3 (quindi: una in più, rispetto alle incognite).

Se ci limitiamo a considerare solamente le prime due equazioni,
queste formeranno un "sotto-sistema" del sistema dato:

$$\begin{cases} x-y=3 \\ 2x+y=9 \end{cases}$$

Risolvendo ora, con un metodo qualsiasi, tale sotto-sistema,
si trova che esso ammette come unica soluzione la coppia

$$\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$$

Questa coppia $x=4,\ y=1$ è dunque la sola che verifichi contemporaneamente
tanto la 1^{a} quanto la 2^{a} equazione del sistema iniziale.
Tuttavia, possiamo constatare che tale coppia NON rende verificata la 3^{a} equazione del sistema,
ossia la $3x-2y=7$.

E allora, in definitiva, siamo costretti a concludere che non esiste alcuna coppia $(x,\ y)$
che "vada bene" per tutte e tre le equazioni del sistema assegnato.

Questo è perciò IMPOSSIBILE (si dice anche: "INCOMPATIBILE").

Se l'ultima equazione, anziché essere $3x-2y=7$, fosse stata, poniamo, $3x-2y=10$,
allora la coppia $x=4,\ y=1$ avrebbe verificato, oltre alle prime due equazioni, anche l'ultima,
quindi il sistema sarebbe stato possibile (si dice preferibilmente: "COMPATIBILE"),
con soluzione, appunto, data da:

$$\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$$

L'esempio fatto mostra che, IN GENERALE,
da un sistema in cui ci siano più equazioni che incognite dobbiamo *aspettarci* impossibilità.
Infatti, se da un sistema siffatto andiamo ad "estrarre" un "sotto-sistema"
nel quale le equazioni siano tante quante le incognite, tale "sotto-sistema"
avrà, generalmente, una e una sola soluzione;
però tale soluzione, per essere soluzione pure del sistema "complessivo",
dovrebbe a questo punto verificare anche tutte le equazioni rimanenti,
e questo, evidentemente, avviene solo in via eccezionale:
di norma, non avviene.

Insomma:

**Se il numero delle equazioni è maggiore del numero delle incognite,
queste ultime hanno troppi vincoli da rispettare
e, IN LINEA DI MASSIMA, "non ce la faranno" a soddisfarli tutti.
Salvo casi eccezionali, il sistema sarà impossibile.**

NOTA
Questo discorso, fatto pensando ai sistemi "lineari" (= di 1° grado),
si estende comunque, sempre come indicazione di carattere generale,
ai sistemi di equazioni di qualsiasi tipologia

♥ Nel volume 2 studieremo il bel Teorema di Rouché-Capelli, che darà ordine e rigore a ciò che in queste pagine presentiamo come indicazioni "valide in linea di massima".

B) PIU' INCOGNITE CHE EQUAZIONI

E se invece avessimo più incognite che equazioni?

Consideriamo l'esempio seguente:

$$\begin{cases} 3x+2y-z=20 \\ x+y-2z=6 \end{cases}$$

Isoliamo y dalla seconda equazione, e sostituiamo nella prima:

$$\begin{cases} y=6-x+2z \\ 3x+2(6-x+2z)-z=20; \quad 3x+12-2x+4z-z=20; \quad x+3z=8 \end{cases}$$

Ora isoliamo x dall'ultima equazione ottenuta, e sostituiamo nell'altra:

$$\begin{cases} \boxed{x=8-3z} \\ y=6-(8-3z)+2z; \quad y=6-8+3z+2z; \quad \boxed{y=5z-2} \end{cases}$$

Pertanto sono soluzioni del nostro sistema tutte e sole le terne (x, y, z) costruibili assegnando a z un valore ad arbitrio, poi calcolando i valori di x e di y mediante le uguaglianze $x=8-3z;\ y=5z-2$.
Ad es., scegliendo per z il valore 1, avremo $x=8-3=5,\ y=5-2=3$.
Bene, la terna $x=5,\ y=3,\ z=1$ è soluzione del nostro sistema.
Ponendo invece $z=0$, avremo $x=8,\ y=-2$
e la terna $(8,\ -2,\ 0)$ è un'altra soluzione del sistema in esame.

Possiamo indicare le infinite soluzioni del sistema dato con la scrittura $\begin{cases} x=8-3z \\ y=5z-2 \\ z\ \textit{qualsiasi} \end{cases}$

E quindi il sistema proposto, per il fatto di avere infinite soluzioni, è INDETERMINATO.

Vediamo quest'altro esempio:

$$\begin{cases} x+y+u+v+z=1 \\ 5x+4y-3u+2v+z=2 \\ x-u-z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=u+z \\ (u+z)+y+u+v+z=1 \\ 5(u+z)+4y-3u+2v+z=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=u+z \\ y+2u+v+2z=1 \\ 4y+2u+2v+6z=2; \quad 2y+u+v+3z=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=u+z \\ y=1-2u-v-2z \\ 2(1-2u-v-2z)+u+v+3z=1; \quad -3u-v-z=-1; \quad 3u+v+z=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=u+z \\ y=1-2u-v-2z \\ v=1-3u-z \end{cases} \qquad \begin{cases} x=u+z \\ y=1-2u-(1-3u-z)-2z \\ v=1-3u-z \end{cases} \qquad \begin{cases} x=u+z \\ y=u-z \\ v=1-3u-z \end{cases}$$

Le soluzioni sono perciò tutte e sole le cinquine (x, y, u, v, z) nelle quali:

$$\begin{cases} x=u+z \\ y=u-z \\ u\ \ \textit{qualsiasi} \\ v=1-3u-z \\ z\ \ \textit{qualsiasi} \end{cases}$$

Nel sistema dato, che aveva 3 equazioni e 5 incognite,
abbiamo espresso 3 delle incognite in funzione delle 2 incognite rimanenti.

Generalizzando:

Quando un sistema ha più incognite che equazioni (diciamo, per fissare le idee: n incognite e k equazioni, con n>k), allora esso sarà (IN LINEA DI MASSIMA) "indeterminato con $n-k$ gradi di libertà", nel senso che k fra le incognite potranno essere espresse in funzione delle $n-k$ incognite rimanenti (alle quali si potranno assegnare valori arbitrari).

NOTA - Questo discorso, fatto pensando ai sistemi "lineari" (= di 1° grado), si estende comunque, sempre come indicazione di carattere generale, ai sistemi di equazioni di qualsiasi tipologia

Nel volume 2 studieremo il bel Teorema di Rouché-Capelli, che darà ordine e rigore a ciò che in queste pagine abbiamo presentato come indicazioni "valide in linea di massima".

Gli ESERCIZI su questo paragrafo sono a pag. 410.