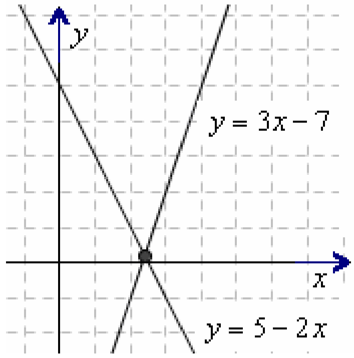
3. LA RISOLUZIONE GRAFICA DI UN SISTEMA LINEARE IN DUE INCOGNITE

La si può effettuare isolando la y in entrambe le equazioni:

$$\begin{cases} 2x+y=5 \\ 3x-y=7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{y=5-2x} \\ \boxed{y=3x-7} \end{cases}$$



Poi si tracciano, in uno stesso riferimento cartesiano,
i grafici delle due funzioni così ottenute:

$y=5-2x,\ y=3x-7$

(*nel nostro esempio, poiché le funzioni sono di 1° grado, si tratterà di due rette*)

… per cercare infine la coppia (*x*, *y*) che appartiene ad *entrambi* i grafici.

In pratica, dunque, si va a prendere il PUNTO DI INTERSEZIONE fra i due grafici tracciati.

La *x* e la *y* di quel punto costituiranno la coppia $\begin{cases} x = ... \\ y = ... \end{cases}$ soluzione del sistema.

Nel nostro caso, graficamente non siamo in grado di stabilire quale sia il valore *esatto* di questa coppia (x, y); possiamo solo osservare che è $2<x<3$ e $0<y<1$ (con *y* molto più vicina a 0 che a 1).

In effetti, **di norma, queste risoluzioni grafiche ci permettono di *approssimare* la soluzione, piuttosto che di determinarla perfettamente**.

♥ L'interpretazione grafica può essere un'utile occasione per ribadire che (salvo rare eccezioni) *una singola* equazione in due incognite è verificata da INFINITE coppie (*x*, *y*).

Consideriamo, ad esempio, la retta "in discesa", che "rappresenta" l'equazione $2x+y=5$ $(y=5-2x)$.
Se nell'equazione $y=5-2x$ noi poniamo, ad esempio, $x=1$, otteniamo $y=5-2\cdot 1=3$;
bene, ciò significa che la coppia $x=1,\ y=3$ (brevemente: la coppia $(1,\ 3)$) è soluzione dell'equazione $y=5-2x$ quindi anche della sua equivalente $2x+y=5$ (controlliamo: $2\cdot 1+3=5$ *OK*).
Dando poi a *x* altri valori possiamo determinare *altre* coppie (*x*, *y*) che rendono vera l'equazione $y=5-2x$:

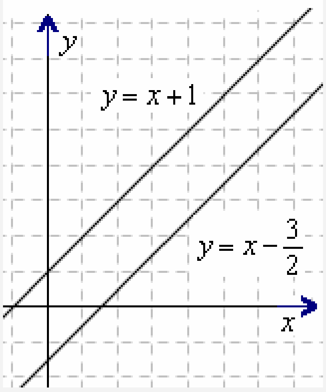
$$(0,5);\quad (2,\ 1);\quad (3,-1);\quad (10,-15);\quad (-1,7);\quad \left(\frac{1}{2},\ 4\right);\quad (3,7;\ -2,4);\quad ...$$

Tali infinite coppie (x, y) sono per l'appunto le coordinate degli infiniti punti che compongono la retta in discesa; mentre le coordinate (x, y) degli infiniti punti della retta in salita sono quelle coppie (x, y) che "vanno bene" per l'equazione $y=3x-7$ (o per la sua equivalente $3x-y=7$).
Le coordinate del punto in cui le due rette si intersecano sono dunque quei valori $x=...,\ y=...$ per i quali sono verificate SIMULTANEAMENTE ENTRAMBE le equazioni in gioco.

❑ E se le due rette fossero parallele? Vorrebbe dire che quel sistema è IMPOSSIBILE (1).

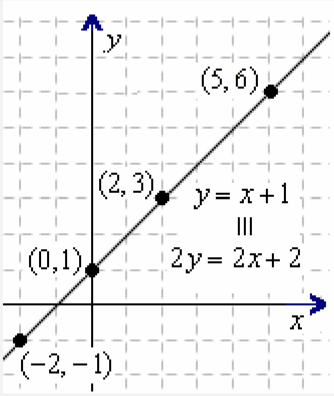
❑ Se poi quelle due rette coincidessero, saremmo di fronte a un sistema INDETERMINATO, avente per soluzioni tutte le infinite coppie (x, y) che verificano una a piacere fra le equazioni in gioco (2).

(1) Il sistema
$$\begin{cases} x-y=-1 \\ 2x-2y=3 \end{cases}$$
equivale a
$$\begin{cases} y=x+1 \\ y=x-\dfrac{3}{2} \end{cases}$$
ed è IMPOSSIBILE (rette parallele).



Osserviamo che è verificata la *condizione sufficiente di impossibilità*
$\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}$: è infatti $\dfrac{1}{2}=\dfrac{-1}{-2}\neq\dfrac{-1}{3}$

(2) Il sistema
$$\begin{cases} x-y=-1 \\ 2x-2y=-2 \end{cases}$$
equivale a
$$\begin{cases} y=x+1 \\ 2y=2x+2 \quad (y=x+1) \end{cases}$$
ed è INDETERMINATO (rette coincidenti).



Qui è verificata la *condizione sufficiente di indeterminazione*
$\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$

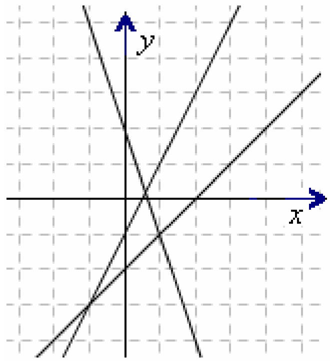
Le soluzioni del sistema sono tutte le coppie (x, y) che corrispondono ai punti di una qualsiasi delle due rette:
$(-2,-1);\ (0,1);\ (2,3);\ (5,6);\ (2,45;3,45);\ ...$

Supponiamo ora che il sistema abbia 2 incognite, ma 3 equazioni: ad esempio

$$\begin{cases}3x+y=2\\x-y=2\\2x-y=1\end{cases}\quad\begin{cases}\boxed{y=2-3x}\\\boxed{y=x-2}\\\boxed{y=2x-1}\end{cases}$$

Già abbiamo visto che, **di norma, sistemi di questo tipo sono impossibili;**
ma che **potrebbero però, eccezionalmente, avere soluzione o addirittura risultare indeterminati**.

In effetti, qui le rette in gioco sono 3:

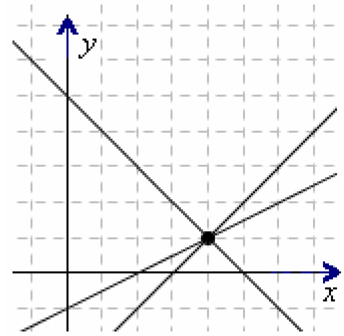


nel nostro caso, le tre rette NON passano tutte per uno stesso punto,
situazione che è poi la più "ordinaria" per 3 rette su un piano,
quindi non esiste una coppia (x, y) che soddisfi simultaneamente tutte e tre le equazioni considerate.

Invece il sistema che segue:

$$\begin{cases}x+y=5\\x-y=3\\x-2y=2\end{cases}\quad\begin{cases}\boxed{y=5-x}\\\boxed{y=x-3}\\\boxed{y=\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{1}{2}x-1}\end{cases}$$

è, eccezionalmente, determinato, in quanto le tre rette passano tutte per uno stesso punto,
le cui coordinate $x=4,\ y=1$ costituiscono la soluzione del sistema.



ESERCIZI

Risolvi, sia graficamente che algebricamente, i sistemi che seguono:

1) $\begin{cases}2x+y=4\\x-y=5\end{cases}$ 2) $\begin{cases}6x+2y=8\\3x+y=4\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x-y=3\\3x-3y=1\end{cases}$ 4) $\begin{cases}3x-2y=4\\x+4y=-1\end{cases}$ 5) $\begin{cases}x-5y=1\\5x-y=1/5\end{cases}$ 6) $\begin{cases}x-2y=4\\2x-4y=1\end{cases}$

7) $\begin{cases}2x-y=0\\-x+y=3\\x+y=5\end{cases}$ 8) $\begin{cases}x-2y=0\\x+y=3\\2x-y=3\end{cases}$ 9) $\begin{cases}4x+y=7\\x-2y+5=0\\2x+0{,}5y=3{,}5\end{cases}$ 10) $\begin{cases}x+y=4\\0{,}25x+0{,}25y=1\\2x+2y=5\end{cases}$ 11) $\begin{cases}0{,}125x-0{,}125y=0{,}25\\0{,}5x=1+0{,}5y\\y+2=x\end{cases}$

RISPOSTE

1) $\begin{cases}x=3\\y=-2\end{cases}$ 2) indet.: $\begin{cases}x=x\\y=4-3x\end{cases}$ 3) imposs. 4) $\begin{cases}x=1\\y=-1/2\end{cases}$ 5) $\begin{cases}x=0\\y=-1/5\end{cases}$ 6) imposs.

7) imposs. 8) $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$ 9) $\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$ 10) imposs. 11) indet.: $\begin{cases}x=x\\y=x-2\end{cases}$