4. SISTEMI LETTERALI

Esempio:

$$\begin{cases} ax - by = a^2 + b^2 \\ bx + ay = a^2 + b^2 \end{cases}$$

Per **SOSTITUZIONE**:

$$\begin{cases} ax = a^2 + b^2 + by; \quad x = \dfrac{a^2 + b^2 + by}{a} \quad \underset{\text{NOTA 1}}{(a \neq 0)} \\ b \cdot \dfrac{a^2 + b^2 + by}{a} + ay = a^2 + b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{a^2 + b^2 + by}{a} \\ \dfrac{a^2 b + b^3 + b^2 y + a^2 y}{\cancel{a}} = \dfrac{a^3 + ab^2}{\cancel{a}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{a^2 + b^2 + by}{a} \\ b^2 y + a^2 y = a^3 + ab^2 - a^2 b - b^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \quad '' \\ (a^2 + b^2) y = a(a^2 + b^2) - b(a^2 + b^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \quad '' \\ (a^2 + b^2) y = (a^2 + b^2)(a - b); \quad y = a - b \quad \text{(NOTA 2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = a - b \\ x = \dfrac{a^2 + b^2 + b(a - b)}{a} = \dfrac{a^2 \cancel{+b^2} + ab \cancel{-b^2}}{a} = \dfrac{\cancel{a}(a + b)}{\cancel{a}} = a + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a + b \\ y = a - b \end{cases}$$

NOTA 1
Questo passaggio, finalizzato a isolare *x*, è effettuabile solo nel caso $a \neq 0$; il caso particolare $a = 0$ andrà valutato a parte (lo riprenderemo alla fine dell'esercizio)

NOTA 2
La semplificazione dell'equazione è effettuabile solo nel caso $a^2 + b^2 \neq 0$; d'altra parte, potrebbe risultare $a^2 + b^2 = 0$ soltanto se fosse $a = b = 0$, e noi in questo momento ci siamo posti nel caso $a \neq 0$, quindi la quantità $a^2 + b^2$ per la quale abbiamo semplificato è certamente diversa da 0. Non è pertanto necessario porre alcuna condizione per la semplificazione.

Per **RIDUZIONE**:

$$\begin{matrix} a \cdot \\ b \cdot \end{matrix} \begin{cases} ax - by = a^2 + b^2 \\ bx + ay = a^2 + b^2 \end{cases} \quad (a \neq 0,\ b \neq 0 : \textit{vedi}\ \text{NOTA 3})$$

$$\begin{cases} a^2 x - aby = a^3 + ab^2 \\ b^2 x + aby = a^2 b + b^3 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} (1)+(2) \\ (2) \end{matrix} \begin{cases} a^2 x + b^2 x = a^3 + ab^2 + a^2 b + b^3; \quad \cancel{(a^2 + b^2)} x = \cancel{(a^2 + b^2)}(a + b) \\ bx + ay = a^2 + b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a + b \\ b(a + b) + ay = a^2 + b^2; \quad ab \cancel{+b^2} + ay = a^2 \cancel{+b^2}; \quad \cancel{a} y = a^{\cancel{2}} - \cancel{a} b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a + b \\ y = a - b \end{cases}$$

NOTA 3
Con l'obiettivo di mandar via la *y*, moltiplichiamo la prima equazione per *a* e la seconda per *b*. A tale scopo, dobbiamo supporre $a \neq 0$ e $b \neq 0$, quindi in coda all'esercizio dovremo andare a valutare cosa succede nei due casi particolari ($a = 0, b = 0$) che stiamo provvisoriamente lasciando da parte.

Con **CRAMER**:

$$\begin{cases} ax-by=a^2+b^2 \\ bx+ay=a^2+b^2 \end{cases}$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a^2+b^2 & -b \\ a^2+b^2 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}}=\frac{a\left(a^2+b^2\right)+b\left(a^2+b^2\right)}{a^2+b^2}=\frac{\cancel{\left(a^2+b^2\right)}(a+b)}{\cancel{a^2+b^2}}=a+b \qquad \left(a^2+b^2\neq 0\right)$$
NOTA 4

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a & a^2+b^2 \\ b & a^2+b^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}}=\frac{a\left(a^2+b^2\right)-b\left(a^2+b^2\right)}{a^2+b^2}=\frac{\cancel{\left(a^2+b^2\right)}(a-b)}{\cancel{a^2+b^2}}=a-b \qquad \left(a^2+b^2\neq 0\right)$$

NOTA 4
L'applicazione nel metodo di Cramer comporta l'introduzione di denominatori,
quindi vale a condizione che i denominatori stessi siano diversi da 0.
Il caso opposto $a^2+b^2=0$ (che si verifica esclusivamente con $a=b=0$) andrà valutato a parte.

LA DISCUSSIONE DEL SISTEMA

Come abbiamo visto, **la risoluzione, con qualunque metodo venga effettuata, può comportare l'individuazione di casi particolari, che vengono "provvisoriamente messi da parte", per valutarli poi alla fine.**

Ad esempio,
- risolvendo con SOSTITUZIONE, abbiamo "accantonato" il caso $a=0$;
- con RIDUZIONE, abbiamo lasciato da parte i casi $a=0$ e $b=0$;
- col metodo di CRAMER, abbiamo accantonato il caso $a^2+b^2=0$ $(a=b=0)$

♥ **Questi casi particolari vanno ripresi in coda all'esercizio, per capire "cosa diventa" il sistema in ciascun caso, e per stabilire se si tratta, eventualmente, di un caso di impossibilità o di indeterminazione per il sistema.**

- *Ad esempio, se abbiamo risolto con SOSTITUZIONE, il caso accantonato è* $a=0$.

  Bene! Con $a=0$ *il sistema* $\begin{cases} ax-by=a^2+b^2 \\ bx+ay=a^2+b^2 \end{cases}$ *diventa*

  $\begin{cases} -by=b^2 \\ bx=b^2 \end{cases}$ *e ora possiamo dire che:*

  - *se* $b\neq 0$ *è lecito semplificare entrambe le equazioni ottenendo* $\begin{cases} x=b \\ y=-b \end{cases}$
  - *se invece è anche* $b=0$ *il sistema è COMPLETAMENTE INDETERMINATO (qualsiasi coppia (x, y) ne è soluzione).*

  Osserviamo che, con $a=0$ *e* $b\neq 0$, *la soluzione ottenuta* $\begin{cases} x=b \\ y=-b \end{cases}$ *non è altro che la "normalissima" soluzione* $\begin{cases} x=a+b \\ y=a-b \end{cases}$, *nel caso particolare* $a=0$ *!!!*

  E allora l'unico caso "anomalo" per questo sistema è in definitiva il caso $a=b=0$, *nel quale il nostro sistema risulta, come abbiamo visto, completamente indeterminato.*

- *Analogamente, se si è risolto con RIDUZIONE, occorre riprendere i due casi accantonati ecc.*
  Stessa cosa se la risoluzione è stata effettuata con CRAMER: va ripreso il caso accantonato.
  E' ovvio che la conclusione della discussione dovrà essere sempre la medesima, comunque si proceda.

Ecco qui di seguito **un altro esempio**.
Si tratta di un sistema che si presta molto bene ad essere risolto per RIDUZIONE.

$$\begin{cases}(a^2+9)(x+y-1)=6a(x-y)\\(a-3)(x-y-1)=6y\end{cases}$$

Portiamo innanzitutto in "forma normale":

$$\begin{cases}(a^2+9)(x+y-1)=6a(x-y)\\(a-3)(x-y-1)=6y\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2x+a^2y-a^2+9x+9y-9=6ax-6ay\\ax-ay-a-3x\underline{+3y}+3=\underline{6y}\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2x-6ax+9x+a^2y+6ay+9y=a^2+9\\ax-3x-ay-3y=a-3\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a^2-6a+9)x+(a^2+6a+9)y=a^2+9\\(a-3)x-(a+3)y=a-3\end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases}(a-3)^2x+(a+3)^2y=a^2+9\\(a-3)x-(a+3)y=a-3\end{cases}\quad \text{FORMA NORMALE}}$$

Risolviamo per **RIDUZIONE**, moltiplicando la seconda equazione per $(a+3)$

$$Con\ a\neq-3\ (\text{NOTA}):\quad (a+3)\cdot\begin{cases}(a-3)^2x+(a+3)^2y=a^2+9\\(a-3)x-(a+3)y=a-3\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a-3)^2x+(a+3)^2y=a^2+9\\(a^2-9)x-(a+3)^2y=a^2-9\end{cases}$$

NOTA
La moltiplicazione per $(a+3)$
è effettuabile soltanto supponendo
$a\neq-3$,
altrimenti l'equazione verrebbe
moltiplicata per 0 e quindi "distrutta".
Il caso particolare $a=-3$
andrà valutato separatamente.

$$\begin{matrix}(1)+(2)\\(2)\end{matrix}\quad\begin{cases}(a-3)^2x+(a^2-9)x=a^2\cancel{+9}+a^2\cancel{-9}\\(a-3)x-(a+3)y=a-3\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2x-6ax\cancel{+9x}+a^2x\cancel{-9x}=2a^2\\(a-3)x-(a+3)y=a-3\end{cases}$$

$$\begin{cases}2a^2x-6ax=2a^2;\quad a^2x-3ax=a^2;\quad ax-3x=a\quad(a\neq0);\\(a-3)x-(a+3)y=a-3\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a-3)x=a\ ;\quad x=\dfrac{a}{a-3}\quad(a\neq3);\\\cancel{(a-3)}\cdot\dfrac{a}{\cancel{a-3}}-(a+3)y=a-3\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\dfrac{a}{a-3}\\\cancel{a}-(a+3)y=\cancel{a}-3;\quad(a+3)y=3;\quad y=\dfrac{3}{a+3}\quad(a\neq-3)\end{cases}$$

Cerchiamo ora di capire (DISCUSSIONE)
cosa accade nei casi particolari, che abbiamo provvisoriamente lasciato da parte.

DISCUSSIONE

Il sistema in forma normale era

$$\boxed{\begin{cases}(a-3)^2x+(a+3)^2y=a^2+9\\(a-3)x-(a+3)y=a-3\end{cases}}$$

Vediamo cosa diventa, rispettivamente, nei tre casi: $a=-3;\quad a=3;\quad a=0$

- Con $\boxed{a=-3}$ il sistema diventa

$$\begin{cases}(-3-3)^2x+(-3+3)^2y=(-3)^2+9\\(-3-3)x-(-3+3)y=-3-3\end{cases}$$

$$\begin{cases}36x=18;\quad x=1/2\\-6x=-6;\quad x=1\end{cases}$$

Le due equazioni sono, evidentemente, incompatibili; il sistema, con $a=-3$, è IMPOSSIBILE.

- Con $\boxed{a=3}$ il sistema diventa

$$\begin{cases}(3-3)^2x+(3+3)^2y=3^2+9\\(3-3)x-(3+3)y=3-3\end{cases}$$

$$\begin{cases}36y=18;\quad y=1/2\\-6y=0;\quad y=0\end{cases}$$

Le due equazioni sono, evidentemente, incompatibili; il sistema, con $a=3$, è IMPOSSIBILE.

- Con $\boxed{a=0}$ il sistema diventa:

$$\begin{cases}9x+9y=9;\quad x+y=1\\-3x-3y=-3;\quad x+y=1\end{cases}$$

Le due equazioni coincidono; il sistema, con $a=0$, è INDETERMINATO

e ha come soluzioni le infinite coppie: $\begin{cases}x\ \textit{qualsiasi}\\y=1-x\end{cases}$

Risolvendo per **SOSTITUZIONE** avremmo avuto passaggi più pesanti:

$$\begin{cases}(a-3)x=(a+3)y+a-3;\quad x=\dfrac{(a+3)y+a-3}{a-3}\quad (a\neq 3)\\(a-3)^{\cancel{2}}\cdot\dfrac{(a+3)y+a-3}{\cancel{a-3}}+(a+3)^2y=a^2+9\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\dfrac{(a+3)y+a-3}{a-3}\\(a-3)(a+3)y+(a-3)^2+(a+3)^2y=a^2+9\end{cases};\quad\begin{cases}\quad ''\\a^2y\cancel{-9y}\cancel{+a^2}-6a\cancel{+9}+a^2y+6ay\cancel{+9y}=\cancel{a^2}\cancel{+9}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\quad ''\\2a^2y+6ay=6a;\quad a^2y+3ay=3a;\quad ay+3y=3\ (a\neq 0)\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\dfrac{(a+3)y+a-3}{a-3}\\(a+3)y=3;\quad y=\dfrac{3}{a+3}\ (a\neq -3)\end{cases};\quad\begin{cases}x=\dfrac{\cancel{(a+3)}\cdot\dfrac{3}{\cancel{a+3}}+a-3}{a-3}=\dfrac{\cancel{3}+a\cancel{-3}}{a-3}=\dfrac{a}{a-3}\\y=\dfrac{3}{a+3}\end{cases}$$

… e a questo punto avremmo dovuto, come prima,
procedere con la valutazione dei casi particolari trovati, e provvisoriamente accantonati ($a=-3,\ a=3,\ a=0$).