2. INTRODUZIONE AL CONCETTO DI FUNZIONE

Definizione

♥ **Si ha una FUNZIONE quando si hanno**
due grandezze variabili, legate fra loro in modo che
ad ogni valore di una di esse (variabile indipendente)
corrisponde UNO E UN SOLO valore dell'altra (variabile dipendente).

Di preferenza,
la variabile indipendente si indica con la lettera x,
e la variabile dipendente con y,
ma a volte è più opportuna una scelta dei simboli diversa.

ESEMPI

a) Com'è noto, il **volume della sfera** si ottiene applicando la formula $\mathbf{V}=\frac{4}{3}\pi\mathbf{r}^3$.

E' chiaro (sia dalla formula che dall'intuizione geometrica)
che **ad ogni valore del raggio corrisponde uno e un solo valore del volume.**
Il raggio (r) è la variabile indipendente; il volume (V) è la variabile dipendente.
Si ha una **funzione**, che potremmo chiamare ad esempio **f**
(per indicare una funzione si usa di solito una lettera alfabetica, minuscola o maiuscola).

Scriveremo allora $\mathbf{V}=\frac{4}{3}\pi\mathbf{r}^3=\mathbf{f}(\mathbf{r})$

La scrittura
$\mathbf{V}=\mathbf{f}(\mathbf{r})$
si legge
" V uguale f di r "
e significa:

"ho una funzione,
che ho indicato col simbolo f ,
nella quale
la variabile indipendente è stata indicata col simbolo r
e la variabile dipendente col simbolo V ".

$$\underset{\textit{var. dip.}}{\mathbf{V}} = \underset{\textit{nome della funzione}}{\mathbf{f}}\;(\underset{\textit{var. ind.}}{\mathbf{r}})$$

Ad esempio, il volume di una sfera di raggio 3 metri è: $f(3)=\frac{4}{3}\pi\cdot 3^3=\frac{4}{3}\pi\cdot 27=36\pi\approx 113{,}1\ \mathrm{m}^3$.

b) Se un'automobile si muove con la velocità costante di 1,5 metri al secondo,
- dopo 1 secondo dall'istante in cui facciamo scattare il cronometro avrà percorso 1,5 m,
- dopo 2 secondi 3 m,
- dopo 3 secondi 4,5 m,
- dopo ½ secondo 0,75 m,
- ecc. ecc.

In questo caso la variabile indipendente è il tempo (che potremmo indicare con t)
e la variabile dipendente è lo spazio percorso (lo indicheremo con s).
La funzione, cioè il legame fra le due variabili, si può esprimere mediante la formula $s=1{,}5\ t$.
Se chiamiamo questa funzione D (D come Distanza), avremo: $s=D(t)=1{,}5\ t$.
E potremo scrivere, ad esempio: $D(2)=3,\ D(10)=15,$ ecc.

c) Supponiamo di misurare il tempo in ore, e le temperature in gradi centigradi. Immaginiamo di piazzarci con un termometro davanti al cancello della scuola e di far scattare il cronometro.

La nostra unità di misura per i tempi sarà la durata di 1 ora.

La temperatura, all'istante $t=0$, avrà un certo valore,
all'istante $t=1$ (cioè dopo 1 ora) avrà un certo altro valore (>, < o eventualmente = al precedente),
all'istante $t=1{,}4$ (cioè dopo 1 ora e 4/10 di ora, 1 ora e 24 minuti) un certo altro valore, ecc.

E' chiaro che, in questo caso, non c'è alcuna formula
che permetta di calcolare la temperatura conoscendo il valore di t.

Si ha ancora una funzione,
perché ad ogni valore del tempo t corrisponde 1 e un solo valore della temperatura T,
ma questa funzione NON è esprimibile mediante una formula matematica.

Si ha cioè una funzione "**empirica**",
perché solo l'osservazione diretta può farci conoscere qual è il valore
che la variabile dipendente assume in corrispondenza di un certo valore della variabile indipendente.
Le funzioni degli esempi precedenti erano invece funzioni "matematiche".

*Una funzione si dice "**matematica**" (o anche "analitica")*
quando esiste una "legge" che consenta di passare
da un dato valore della variabile indipendente
al corrispondente valore della variabile dipendente,
semplicemente effettuando dei calcoli.
*Si dice "**empirica**" in caso contrario.*

3. IL "DOMINIO" DI UNA FUNZIONE; PRECISAZIONI SULLA DEFINIZIONE

♥ Si dice "dominio" o "campo di esistenza" (C.E.) di una funzione,
l'insieme dei valori che è possibile attribuire alla variabile indipendente,
affinché esista il corrispondente valore della variabile dipendente.

ESEMPI

Funzione	Dominio
$y = \frac{1}{x}$	$\{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$
$y = \sqrt{x-5}$	$\{x \in \mathbb{R} / x \geq 5\}$
$y = x^2 - x - 2$	$\mathbb{R}$

♥ Avevamo iniziato il discorso affermando che
si ha una FUNZIONE quando ci sono due grandezze variabili,
legate fra loro in modo che ad OGNI valore di una di esse (variabile indipendente)
corrisponde UNO E UN SOLO valore dell'altra (variabile dipendente).

Ma più precisamente, QUELL' "OGNI" VA INTERPRETATO.
Si deve intendere "AD OGNI VALORE DELLA VARIABILE INDIPENDENTE …
… PRESO DA UN OPPORTUNO INSIEME DI RIFERIMENTO (il 'dominio', appunto)".

A volte, poi, per determinare il "dominio" di una funzione,
occorre badare, oltre che al puro aspetto del calcolo,
anche a considerazioni di carattere "contestuale".

Prendiamo ad esempio la funzione $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = f(r)$ legata al volume della sfera.

Dal punto di vista della pura Algebra, alla lettera r potremmo assegnare anche valori <0;
ma dal punto di vista dell'interpretazione geometrica, questi non avrebbero senso e dunque
è più corretto dire che il dominio di questa funzione è l'insieme dei valori di r maggiori di 0 (o ≥ 0,
se si accetta l'idea di una sfera di raggio nullo, che si ridurrebbe ad un punto, e avrebbe volume nullo).

♥ IN DEFINITIVA, per "DOMINIO" di una funzione si intenderà

l'insieme dei valori che è possibile attribuire alla variabile indipendente,
affinché esista il corrispondente valore della variabile dipendente
oppure anche un insieme più "ristretto" di questo,
quando intervengano ulteriori limitazioni
legate al contesto nel quale la funzione viene applicata.